УДК 517.918

К вопросу возмущения устойчивого инвариантного тора динамической системы

В. Л. Голец

Выяснение условий сохранения инвариантного многообразия динамической системы при малых ее возмущениях приводит к исследованию системы уравнений

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, y), \quad \frac{dy}{dt} = b(\varphi, y)\, y + c(\varphi), \tag{1}$$

где $\varphi (= \varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — угловые координаты, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — нормальные координаты.

Достаточные условия существования инвариантного тородиального многообразия

$$\Gamma : y = u(\varphi) \tag{2}$$

такой системы при малых значениях $c(\varphi)$ даны в [1—8].

Доказано, в частности в [6, 7], что система (1) с непрерывно дифференцируемыми функциями a, b, c имеет инвариантный тор, лишь только

$$\beta(\varphi) + \alpha(\varphi) > 0, \quad \min_{\varphi} \beta(\varphi) > 0, \tag{3}$$

где β, α — величины, определяемые неравенствами

$$\min_{\|\eta\|=1} (-b(\varphi, 0)\eta, \eta) \geqslant \beta(\varphi), \quad \min_{\|\xi\|=1} \left(\frac{\partial a(\varphi, 0)}{\partial \varphi} \xi, \xi \right) > \alpha(\varphi), \tag{4}$$

в которых $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ — обычное скалярное произведение в E_n, $\|x\|^2 = (x, x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

При выполнении условий (3) тор $\Gamma: y = u(\varphi)$ системы (1) является непрерывным. Если считать функции a, b, c r раз ($r \geqslant 2$) непрерывно дифференцируемыми и предположить выполнимость условий

$$\beta(\varphi) + r\alpha(\varphi) > 0, \quad \min_{\varphi} \beta(\varphi) > 0, \tag{5}$$

то инвариантный тор системы (1) будет $r-1$ раз непрерывно диференцируемым [4—5].

В этой работе, следуя [1], рассмотрим системы (1), в которых a, b, c — липшицевые функции. Наша задача состоит в том, чтобы получить для таких систем условия существования инвариантного многообразия (2), аналогичные условиям (3), (5).

Эту задачу будем решать, используя принцип сжатых отображений по общей системе метода интегральных многообразий [1].

1°. Итак, рассматриваем систему (1), где $a(\varphi, y)$, $b(\varphi, y)y$, $c(\varphi)$ — периодические по φ с периодом 2π функции, заданные в полосе

$$\|y\| \leqslant \varrho \tag{6}$$

и удовлетворяющие определенным условиям малости.

Предположим, что правая часть системы (1) удовлетворяет условиям:

1. Матрица $b(\varphi, y)$ удовлетворяет неравенству

$$\langle b(\varphi, y)\eta, \eta \rangle \leqslant -\lambda \langle \eta, \eta \rangle, \tag{7}$$

$\lambda > 0$ для всех η и всех φ, y из полосы (6), $\langle x, \eta \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \eta_i$ — обычное скалярное произведение евклидового пространства E_n.

2. Функции $a(\varphi, y)$, $c(\varphi)$ и матрица $b(\varphi, y)$ удовлетворяют условиям Липшица по переменным

$$\begin{gathered} \|a(\varphi, y) - a(\overline{\varphi}, \overline{y})\| \leqslant \overline{\alpha} \|\varphi - \overline{\varphi}\| + \alpha_1 \|y - \overline{y}\|, \\ \|b(\varphi, y) - b(\overline{\varphi}, \overline{y})\| \leqslant \beta \|\varphi - \overline{\varphi}\| + \beta_1 \|y - \overline{y}\|, \\ \|c(\varphi) - c(\overline{\varphi})\| \leqslant \delta_1 \|\varphi - \overline{\varphi}\| \end{gathered} \tag{8}$$

для всех φ, y, $\overline{\varphi}$, $\overline{y}$ из области $\|y\| \leqslant \varrho$.

Положим

$$\max_{\varphi} \|c(\varphi)\| = \delta \tag{9}$$

и перейдем к выяснению условий существования инвариантного тора системы (1). Такой тор будем искать в виде (2), где $u(\varphi)$ — периодическая или, учитывая, что $z_\tau^\tau = 0$,

$$z_\tau^t = \Omega_\tau^t(\varphi, F)\int_\tau^t \Omega_{t_1}^\tau(\varphi, F)\,[b(\varphi_{t_1}^F(\varphi), F(\varphi_{t_1}^F(\varphi))) - \\ - b(\varphi_{t_1}^{\overline{F}}(\overline{\varphi}), \overline{F}(\varphi_t^{\overline{F}}(\varphi)))]\,\Omega_\tau^{t_1}(\overline{\varphi}, \overline{F})\,dt_1. \tag{21}$$

Но

$$\|b(\varphi_{t_1}^F(\varphi), F(\varphi_{t_1}^F(\varphi))) - b(\varphi_{t_1}^{\overline{F}}(\overline{\varphi}), \overline{F}(\varphi_{t_1}^{\overline{F}}(\overline{\varphi})))\| \leqslant \beta\,\|\varphi_{t_1}^F(\varphi) - \varphi_{t_1}^{\overline{F}}(\overline{\varphi})\| + \\ + \beta_1\|F(\varphi_{t_1}^F(\varphi)) - \overline{F}(\varphi_{t_1}^{\overline{F}}(\overline{\varphi}))\| \leqslant (\beta + \beta_1\Delta)\,\|\varphi_{t_1}^F(\varphi) - \varphi_{t_1}^{\overline{F}}(\overline{\varphi})\| + \\ + \beta_1\|F(\varphi) - \overline{F}(\varphi)\|_0 \leqslant \tag{22}$$

$$\leqslant (\beta + \beta_1\Delta)\,e^{\mu|t_1|}\,\|\varphi - \overline{\varphi}\| + \left[(\beta + \beta_1\Delta)\frac{\alpha_1}{\mu}(e^{\mu|t_1|} - 1) + \beta_1\right]\|F(\varphi) - \overline{F}(\varphi)\|_0,$$

поэтому, учитывая (20) — (22), для z_τ^0 получаем оценку

$$\|z_\tau^0\| \leqslant \int_\tau^0 \|\Omega_{t_1}^0(\varphi, F)\|\left\{(\beta + \beta_1\Delta)\,e^{-\mu t_1}\,\|\varphi - \overline{\varphi}\| + \right. \\ \left. + \left[(\beta + \beta_1\Delta)\frac{\alpha_1}{\mu}(e^{-\mu t_1} - 1) + \beta_1\right]\|F(\varphi) - \overline{F}(\varphi)\|_0\right\}\|\Omega_\tau^{t_1}(\overline{\varphi}, \overline{F})\|\,d\tau \leqslant \\ \leqslant n^2\frac{(\beta + \beta_1\Delta)}{\mu}e^{\lambda\tau}(e^{-\mu\tau} - 1)\,\|\varphi - \overline{\varphi}\| + n^2\left\{\frac{(\beta + \beta_1\Delta)\,\alpha_1}{\mu^2}e^{\lambda\tau}(e^{-\mu\tau} - 1) + \right. \\ \left. + \left[\frac{(\beta + \beta_1\Delta)\,\alpha_1}{\mu} - \beta_1\right]e^{\lambda\tau}\tau\right\}\|F(\varphi) - \overline{F}(\varphi)\|_0. \tag{23}$$

4°. Определим на $C(D, \Delta)$ оператор S_φ, положив

$$S_\varphi(F) = \int_{-\infty}^0 \Omega_\tau^0(\varphi, F)\,C(\varphi_\tau^F(\varphi))\,d\tau.$$

Неподвижная точка этого оператора и даст нам искомое выражение $u(\varphi)$ для инвариантного тора системы (1). Для существования такой точки помимо сделанных раньше предположений придется наложить некоторые ограничения на постоянные D, Δ, а также на параметры λ, α, α_1, β, β_1, δ и δ_1, характеризующие рассматриваемую систему дифференциальных уравнений. Сущность этих ограничений связана с определенной характеристикой потока траекторий системы (1) при $c=0$ и с малостью функции $c(\varphi)$. Перейдем к выяснению этих ограничений. Для этого оценим $S_\varphi(F)$ и $S_\varphi(F) - S_{\overline{\varphi}}(F)$. Имеем

$$\|S_\varphi(F)\| \leqslant \int_{-\infty}^0 \|\Omega_\tau^0(\varphi, F)\|\cdot\|c(\varphi)\|_0\,d\tau \leqslant \frac{n\delta}{\lambda},$$

$$\|S_\varphi(F) - S_{\overline{\varphi}}(\overline{F})\| \leqslant \int_{-\infty}^0 \|z_\tau^0\|\cdot\|c(\varphi)\|_0\,d\tau + \int_{-\infty}^0 \|\Omega_\tau^0(\overline{\varphi}, \overline{F})\|\cdot\|c(\varphi_\tau^F(\varphi)) - \\ - c(\varphi_\tau^{\overline{F}}(\overline{\varphi}))\|\,d\tau \leqslant \int_{-\infty}^0 \|z_\tau^0\|\,d\tau\delta + \int_{-\infty}^0 \|\Omega_\tau^0\|\cdot\|\varphi_\tau^F(\varphi) - \varphi_\tau^{\overline{F}}(\overline{\varphi})\|\,d\tau\cdot\delta_1. \tag{24}$$

Потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\lambda > \mu. \tag{25}$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{0} \| z_\tau^0 \| \, d\tau \leqslant \frac{n^2(\beta + \beta_1\Delta)}{\lambda(\lambda - \mu)} \| \varphi - \bar{\varphi} \| + \frac{n^2}{\lambda^2} \left[\frac{(\beta + \beta_1\Delta)\alpha_1}{(\lambda - \mu)} + \beta_1 \right] \| F(\varphi) - \bar{F}(\varphi) \|_0, \tag{26}$$

$$\int_{-\infty}^{0} \| \Omega_\tau^0 \| \cdot \| \varphi_\tau^F(\varphi) - \varphi_\tau^{\bar{F}}(\bar{\varphi}) \| \, d\tau \leqslant \frac{n}{\lambda - \mu} \| \varphi - \bar{\varphi} \| + \frac{n\alpha_1}{\lambda(\lambda - \mu)} \| F(\varphi) - \bar{F}(\varphi) \|_0,$$

следовательно,

$$\| S_\varphi(F) - S_{\bar{\varphi}}(\bar{F}) \| \leqslant \frac{n}{\lambda - \mu} \left[\delta \frac{n(\beta + \beta_1\Delta)}{\lambda} + \delta_1 \right] \| \varphi - \bar{\varphi} \| +$$

$$+ \frac{n}{\lambda(\lambda - \mu)} \left[\frac{(\lambda - \alpha)\beta_1 + \beta\alpha_1}{\lambda} n\delta + \alpha_1\delta_1 \right] \| F(\varphi) - \bar{F}(\varphi) \|_0. \tag{27}$$

Функция $S_\varphi(F)$ является, очевидно, периодический по φ с периодом 2π. Поэтому, если потребовать выполнения неравенств

$$\frac{n\delta}{\lambda} \leqslant D, \qquad \frac{n}{\lambda - \mu} \left[\delta \frac{n(\beta + \beta_1\Delta)}{\lambda} + \delta_1 \right] \leqslant \Delta,$$

$$\frac{n}{\lambda(\lambda - \mu)} \left[\frac{(\lambda - \alpha)\beta_1 + \beta\alpha_1}{\lambda} n\delta + \alpha_1\delta_1 \right] < 1, \tag{28}$$

то оператор S_φ будет переводить класс функций $C(D, \Delta)$ в себя и будет сжимающим в $C(D, \Delta)$.

В силу принципа сжатых отображений в $C(D, \Delta)$ будет существовать единственная неподвижная точка $F(\varphi) = u(\varphi)$ оператора S_φ:

$$u(\varphi) = S_\varphi(u) \equiv \int_{-\infty}^{0} \Omega_\tau^0(\varphi, u) \, c(\varphi_\tau(\varphi)) \, d\tau, \tag{29}$$

следовательно, будет существовать инвариантный тор системы (1). Таким образом, ограничения на параметры λ, α, α_1, β, β_1, δ и δ_1, обеспечивающие существование инвариантного тора системы (1), выражаются неравенствами (25), (28).

5°. Обозначим

$$\gamma = \frac{\delta_1}{\delta}, \qquad \mu_0 = \lambda + \alpha \tag{30}$$

и перепишем неравенства (25), (28) в виде

$$\frac{n\delta}{\lambda} \leqslant D, \qquad \mu_0 > \alpha_1\Delta, \qquad \frac{n\delta}{\lambda} \leqslant \frac{\Delta(\mu_0 - \alpha_1\Delta)}{n(\beta + \beta_1\Delta) + \lambda\gamma} = f(\Delta),$$

$$\frac{n\delta}{\lambda} < \frac{\lambda(\mu_0 - \alpha_1\Delta)}{n(\mu_0\beta_1 + \beta\alpha_1) + \lambda\gamma\alpha_1}. \tag{31}$$

Поскольку $f(0) = f\left(\frac{\mu_0}{\alpha_1}\right) = 0$, то $f(\Delta)$ принимает в интервале $0 < \Delta < \frac{\mu_0}{\alpha_1}$

свое наибольшее значение. Несложные вычисления показывают, что это значение достигается в точке

$$\Delta_0 = \left(d^2 + \frac{\mu_0}{\alpha_1}\, d \right)^{1/2} - d, \qquad d = \frac{n\beta + \lambda\gamma}{n\beta_1}\,, \tag{32}$$

являющейся корнем уравнения

$$\Delta^2 + 2d\Delta - \frac{\mu_0}{\alpha_1}\, d = 0, \tag{33}$$

и равняется значению

$$f(\Delta_0) = \frac{\Delta_0(\mu_0 - \alpha_1\Delta_0)}{(\Delta_0 + d)\, n\beta_1}\,. \tag{34}$$

Докажем теперь, что

$$\frac{\lambda(\mu_0 - \alpha_1\Delta_0)}{n(\mu_0\beta_1 + \beta\alpha_1) + \lambda\gamma\alpha_1} \geqslant \frac{\Delta_0(\mu_0 - \alpha_1\Delta_0)}{(\Delta_0 + d)\, n\beta_1}\,. \tag{35}$$

Для этого, учитывая (32) и (33), преобразуем левый знаменатель неравенства (35) к виду

$$n\beta_1\mu_0 + n\beta\alpha_1 + \lambda\gamma\alpha_1 = n\beta_1\mu_0 + \alpha_1 n\beta_1 d =$$

$$= n\beta_1(\mu_0 + \alpha_1 d) = \frac{n\beta_1\alpha_1}{d}(\Delta_0 + d)^2$$

и перейдем от (35) к эквивалентному ему неравенству

$$\frac{\lambda d}{\alpha_1(\Delta_0 + d)} \geqslant \Delta_0.$$

Решая последнее неравенство, находим

$$\Delta_0 \leqslant -\frac{d}{2} + \sqrt{\frac{d^2}{4} + \lambda\frac{d}{\alpha_1}}$$

и, учитывая выражение (32) для Δ_0, получаем

$$\left(1 + \frac{\mu_0}{\alpha_1 d}\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{\lambda}{\alpha_1 d}\right)^{1/2},$$

что всегда верно, лишь только $\lambda > \mu_0 > 0$, $\alpha_1 d \geqslant 0$.

Таким образом, для выполнения неравенств (31) достаточно потребовать, чтобы λ было больше α, а δ было меньше, чем

$$\delta_0 = \min\left[D, \frac{\Delta_0(\mu_0 - \alpha_1\Delta_0)}{(\Delta_0 + d)\, n\beta_1}\right]\frac{\lambda}{n}\,. \tag{36}$$

Анализируя зависимость $f(\Delta_0)$ от параметров α_1 и β_1, получаем, что

$$f(\Delta_0) \to \frac{\mu_0}{n\beta_1} \text{ при } \alpha_1 \to 0,\ f(\Delta_0) \to \frac{\mu_0^2}{4\alpha_1(n\beta + \lambda\gamma)} \text{ при } \beta_1 \to 0,$$

$$f(\Delta_0) \to \infty \text{ при } \alpha_1 \to 0,\ \beta_1 \to 0. \tag{37}$$

Таким образом, для частных видов системы (1) выражение для δ_0 упрощается, принимая вид

$$\delta_0 = \min\left[D, \frac{\mu_0}{n\beta_1}\right]\frac{\lambda}{n} \text{ при } \alpha_1 = 0,$$
$$\delta_0 = \min\left[D, \frac{\mu_0^2}{4\alpha_1(n\beta + \lambda\gamma)}\right] \text{ при } \beta_1 = 0, \tag{38}$$
$$\delta_0 = \frac{D\lambda}{n} \text{ при } \alpha_1 = \beta_1 = 0.$$

6°. Резюмируя сказанное, приходим к утверждению.

Теорема. *Пусть для системы уравнений* (1) *выполняются условия* 1 *и* 2. *Тогда, если*

$$\lambda > \alpha, \ \delta < \delta_0, \tag{39}$$

то система (1) *имеет инвариантный тор* $y = u(\varphi)$, *для которого*

$$\| u(\varphi) \| \leqslant D, \ \| u(\varphi') - u(\varphi'') \| \leqslant \Delta_0 \| \varphi' - \varphi'' \|, \tag{40}$$

где $D \leqslant \varrho$, δ_0 *и* Δ_0 — *постоянные, определяемые согласно* (30), (32), (36) *или* (38).

Учитывая выражение для δ_0, когда $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, убеждаемся, что второе из неравенств (39) для линейных по y систем

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dy}{dt} = b(\varphi)\, y + c(\varphi) \tag{41}$$

всегда выполняется, т. е. для линейных систем малость c не предполагается.

Автор глубоко благодарит А. М. Самойленко за постановку задачи и ценные советы при ее выполнении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Метод интегральных многообразий в нелинейной механике, Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям, Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1963.
2. Я. Курцвейль, Инвариантные многообразия дифференциальных систем, Дифференциальные уравнения, т. 4, № 5, 1968.
3. Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, Лекции по методу интегральных многообразий, «Наукова думка», К., 1968.
4. Ю. Мозер, Быстросходящийся метод итерации и нелинейные дифференциальные уравнения, УМН, т. XXIII, вып. 4(142), 1968.
5. Р. Саккер, A New Approach to the Pertürbation Theory of Invariant Surfaces, Comm. Pure Appl. math., **18**, N 4, 1965.
6. А. М. Самойленко, К теории возмущения инвариантных многообразий динамической системы, Труды V Международной конференции по нелинейным колебаниям, Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1969.
7. А. М. Самойленко, О сохранении инвариантного тора при возмущении, Изв. АН СССР, серия матем., т. 34, № 6, 1970.
8. Дж. Хейл, Колебания в нелинейных системах, «Мир», М., 1966.

Поступила 21.IV 1970 г.
Институт математики АН УССР