ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Kao, L. H. Zetterberg, An identity for the sum of multinominal coefficients, The Amer. Math. Monthly, v. 64, № 2, 1957, 96—100.
2. Дж. Риордан, Введение в комбинаторный анализ, ИЛ, М., 1963.
3. Н. П. Хоменко, Н. А. Островерхий, Диаметрально-критические графы, УМЖ, т. 22, № 5, 1970.
4. R. Sitgreaves, Some properties of Stirling numbers of the second kind, The Fibonacci Quarterly, v. 8, № 2, 1970, 172—181.

Поступила 13.II 1969 г.,
после переработки — 27.VII 1970 г.
Институт математики АН УССР

УДК 517.942.7

К теории обобщенных полиномов Лежандра

В. В. Хорошун

Пусть L — дуга окружности единичного радиуса и пусть $\alpha = e^{i\theta}$ и $\bar{\alpha} = e^{-i\theta}$ ее концы. Пусть $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на L функции класса H [1], причем $G(t) \neq 0$ всюду на L. Допустим, что существует такая кусочно-аналитическая функция $X(z)$, которая имеет исчезающий характер на бесконечности и всюду на L удовлетворяет граничному условию

$$X^+(t) = G(t)\, X^-(t) + g(t), \quad t \in L. \tag{1}$$

Ограничимся теми значениями G, для которых концы L — неособенные. Для этого проведем в плоскости комплексного переменного G разрез вдоль положительной оси, включая нуль. Рассмотрим каноническую функцию неоднородной задачи сопряжения (1) в качестве производящей функции.

1. Коэффициент задачи G — любое конечное отрицательное число. В этом случае каноническая функция неоднородной задачи сопряжения в самом обширном классе h_0 имеет вид

$$X(z) = (z-\alpha)^{-\frac{1}{2}-i\varrho}(z-\bar{\alpha})^{-\frac{1}{2}+i\varrho} = \begin{cases} e^{2\varrho\theta}\sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta;\ \varrho)\, z^n, & |z|<1, \\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} P_n(\cos\theta;\ -\varrho)\, z^{-n-1}, & |z|>1, \end{cases} \tag{2}$$

где $\varrho = \dfrac{\ln|G|}{2\pi}$, а $P_n(\cos\theta;\ \varrho)$ — обобщенные полиномы Лежандра. В частном случае $G = -1$ функция $X(z)$ является производящей для полиномов Лежандра.

2. G—комплексная величина. $G = |G|\, e^{i\psi}$ причем $0 < \psi < 2\pi$. Нетрудно показать, что каноническая функция $X(z)$ в этом случае имеет прежний вид (2), однако параметр ϱ — комплексный.

В самом деле, в классе h_0 каноническая функция $X(z)$ имеет вид

$$X(z) = \left(\frac{z-\alpha}{z-\bar{\alpha}}\right)^{\tau - i\varrho'}(z-\alpha)^{-1}, \tag{3}$$

где $\varrho' = \dfrac{\ln|G|}{2\pi}$, $\tau = \dfrac{\psi}{2\pi}$.

Обозначим

$$\varrho'' = \tau - \frac{1}{2}, \ \ \varrho = \varrho' + i\varrho''. \tag{4}$$

Тогда выражение для $X(z)$ (3) совпадает с (2), если в последнем заменить вещественные значения ϱ комплексными согласно (4), а это значит что и определяемые с помощью производящей функции (2) обобщенные полиномы Лежандра $P_n(\cos\theta;\ \varrho)$ будут комплексными полиномами. Ниже укажем на некоторые свойства этих полиномов, заданных на отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

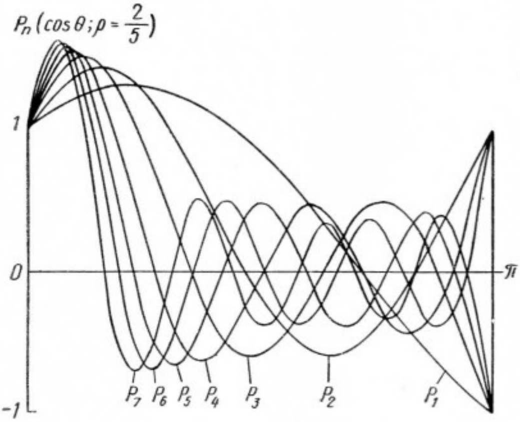

Рис. 1.

Обобщенные полиномы Лежандра $P_n(x;\ \varrho)$ являются решениями дифференциального уравнения

$$(1 - x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2\left(x + \varrho\sqrt{1 - x^2}\right)\frac{du}{dx} + n\left(n + 1 - \frac{2\varrho x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)u = 0. \tag{5}$$

При $\varrho = 0$ это уравнение переходит в уравнение Лежандра. Для полиномов $P_n(x;\ \varrho)$ имеет место рекуррентное соотношение

$$nP_n(x;\ \varrho) = \left[(2n - 1)x + 2\varrho\sqrt{1 - x^2}\right]P_{n-1}(x;\ \varrho) - (n - 1)P_{n-2}(x;\ \varrho) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots),\ \ P_0(x;\ \varrho) = 1$$

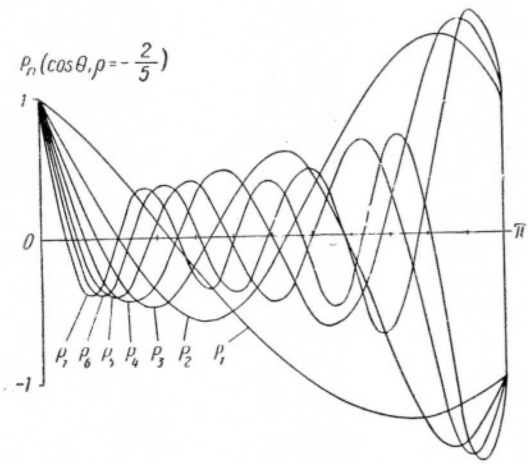

Рис. 2.

и интегральное представление в форме обобщенного интеграла Мелера—Дирихле

$$P_n(\cos\theta;\ \varrho) = e^{-\varrho\theta}(\operatorname{ch}\pi\varrho)^{-1}\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\theta \frac{\cos\left\{\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi + \varrho\ln\dfrac{\sin\frac{\theta - \varphi}{2}}{\sin\frac{\theta + \varphi}{2}}\right\}}{\sqrt{2(\cos\varphi - \cos\theta)}}\,d\varphi.$$

Справедливо следующее представление через гипергеометрические функции:

$$P_n(\cos\theta;\ \varrho) = e^{in\theta}F\left(-n,\ \frac{1}{2} + i\varrho;\ 1;\ 1 - e^{-2i\theta}\right) \tag{6}$$

$$P_n(\cos\theta;\ \varrho) = e^{-i(n+1)\theta}e^{-2\varrho\theta}F\left(n + 1,\ \frac{1}{2} - i\varrho;\ 1;\ 1 - e^{-2i\theta}\right). \tag{7}$$

Из (6) и (7) непосредственно следует $P_{-n}(\cos\theta;\ \varrho) = e^{-2\varrho\theta}P_{n-1}(\cos\theta;\ -\varrho)$.

Приведенные на рис. 1 и 2 для двух частных значений $\varrho = \pm\frac{2}{5}$ графики первых семи полиномов иллюстрируют характер распределения нулей полиномов в промежутке $[0, \pi]$, а также поведение их на концах промежутка, аналогичное полиномам Лежандра.

В рассмотренных нами случаях, параметр ϱ является числом, в общем случае комплексным и не зависит от x. Для случая, когда ϱ является функцией от x вида

$$\varrho = \frac{ax + b}{2\sqrt{1 - x^2}}, \; a \geqslant |b|,$$

полиномы $P_n(x; a, b)$ были введены Полачеком в работе [2]. Как отмечалось в [3], функциональный характер параметра ϱ ведет к тому, что полиномы $P_n(x; a, b)$ не удовлетворяют дифференциальному уравнению вида (5). На концах промежутка $[-1, 1]$ полиномы $P_n(x; a, b)$ ведут себя аналогично полиномам Лагерра.

Рассмотренные выше обобщенные полиномы Лежандра $P_n(\cos\theta; \varrho)$ были использованы при решении ряда задач дифракции в средах с тензорными параметрами методом, развитым в работе [4]. Для идеальных сред искомые амплитуды дифракционных спектров выражались через вещественные полиномы [5] и через комплексные полиномы, если среда обладала потерями [6]. Заметим, что для сред со скалярными параметрами, для которых непосредственно применим метод [4], неизвестные величины выражаются через полиномы Лежандра.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, М., 1962.
2. F. Pollaczek, Sur une generalisation des polynomes de Legendre, C. R. d'Ac. Sc., Paris, **228**, 1949, 1363—1365.
3. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, «Наука», М., 1966.
4. З. С. Агранович, В. А. Марченко, В. П. Шестопалов, Дифракция электромагнитных волн на плоских металлических решетках, ЖТФ, т. 32, № 4, 1962.
5. В. В. Хорошун, Дифракция плоских электромагнитных волн на металлической решетке с гиромагнитной средой, сб. Радиотехника, вып. 4, Харьков, 1967.
6. В. В. Хорошун, Дифракция плоских электромагнитных волн на экранированной решетке с поперечно намагниченным реальным ферритом, сб. Радиотехника, вып. 7, Харьков, 1968.

Поступила 30.X 1969 г.
Харьковский институт радиоэлектроники

УДК 512.25/.26+519.3:330.115

Об одном методе отсечения для дискретных задач

Ю. Ю. Червак

В работе предлагается один подход к решению частично дискретной задачи линейного программирования: максимизировать

$$x_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \ldots, m, \tag{2}$$

$$x_j \geqslant 0, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{3}$$