УДК 517.5

Обобщенные степенные суммы

В. С. Решетников

В данной статье показывается, что формула Ньютона

$$s_k - s_{k-1}b_1 + s_{k-2}b_2 - \ldots + (-1)^n s_{k-n}b_n = 0 \qquad (1)$$

(см. [1, стр. 331, (3)]) имеет место, если под s_k подразумевать

$$s_k = c_1x_1^k + c_2x_2^k + \ldots + c_nx_n^k, \qquad (2)$$

а не только (как в [1])

$$s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k. \qquad (3)$$

Результат представляет интерес для тех разделов математики, в которых встречаются суммы вида (2) (например, [2, стр. 255]).

Как известно, i-й симметрический многочлен b_i от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ имеет соответственно вид

$$\begin{aligned} &b_0 = 1, \\ &b_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \\ &b_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ &b_n = x_1x_2\ldots x_n. \end{aligned}$$

Кроме того, доопределим $b_{-1} = b_{n+1} = 0$.

Обозначим через b_i^j i-й симметрический многочлен от $n - 1$ неизвестного $x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n$. Например,

$$b_1^j = x_1 + x_2 + \ldots + x_{j-1} + x_{j+1} + \ldots + x_n,$$

$$b_2^1 = x_2x_3 + x_2x_4 + \ldots + x_{n-1}x_n.$$

Как легко убедиться, имеет место

$$s_{k-i}b_i = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j^{k-i+1}\, b_{i-1}^j + \sum_{j=1}^{n} c_jx_j^{k-i}\, b_i^j \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n), \qquad (4)$$

где s_k определяются по формуле (2).

Беря альтернированную сумму равенств (4) (для $i = 0, 1, 2, \ldots, n$), получим требуемую формулу (1).

Нетрудно также (при $c_j = 1$) получить формулу (2) работы [1, стр. 331], если учесть, что

$$\sum_{j=1}^{n} b_k^j = (n - k)\, b_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n). \qquad (5)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, «Наука», М., 1968.
2. И. С. Березин, Н. П. Жидков, Методы вычислений, т. I, Физматгиз, М., 1962.

Поступила 19.XI 1970 г.
Москва, ЦНИИЭП жилища