УДК 519.50+519.54

О N-компактности и свойствах измеримости

Д. В. Чудновский

1. В работе устанавливается соотношение между классами несчетных некомпактных или неизмеримых кардиналов, с одной стороны, и классом M таких кардиналов, что $X_m \underset{\text{Cl}}{\subset} N^m$, где X_m — дискретное пространство мощности m, $X_\omega = N$, с другой.

Основной результат (теорема 3) данной статьи является обобщением теоремы 2 из сообщения автора [1].

В статье [2] отмечалось, что $M \subseteq U$ и ставился вопрос о том, когда $M = U$. В данной работе полностью исследуется условие $M = U$ в зависимости от аксиом теории множеств и дается полный ответ на проблему Мрувки [2].

2. Воспользуемся стандартными обозначениями и понятиями теории множеств и общей топологии [3, 4].

Если X, Y — топологические пространства, то $X \underset{\text{Cl}}{\subset} Y$ означает, что X — гомеоморфно замкнутому подмножеству Y.

Если X_m — дискретное пространство мощности $m > \omega$, то полагаем $m \in M$, если $X_m \underset{\text{Cl}}{\subset} N^m$; тогда X_m называется N-компактным. Кардинал $m > \omega$ называется неизмеримым по Уламу ($m \in U$); если на m не существует двузначной счетно-аддитивной нетривиальной меры. В обозначениях [3] $U = C_1' = \{m : [\omega_1, m] \subseteq C_1\}$.

Согласно [3] условие $m \in C_0$ означает, что существует m-полное поле подмножеств m, имеющее не более m- порождающих, в котором некоторый m-полный нетривиальный идеал не расширяется до m- полного примарного идеала. В [2] доказано, что $M \subseteq U$. Решение вопроса о совпадении классов M и U тесно связано с выбираемыми аксиомами теории множеств. Например, в предположении аксиомы конструктивности $V = L$ и аксиомы о несуществовании недостижимых кардиналов, согласно [2 и 5], $M = C = U$, где C — класс всех несчетных кардиналов. Следовательно, условие $M = C = U$ совместимо с теорией множеств.

Однако, даже вопрос о совместимости $M \neq U$ с теорией множеств более сложен. В изучении его окажется полезной следующая теорема.

Теорема 1. *Имеет место* $M \subseteq C_0$.

Доказательство. Предположим, что $m \not\in C_0$. Покажем, что любое подмножество A мощности m в N^m имеет точку накопления, т. е. $X_m \underset{\mathrm{Cl}}{\not\subset} N^m$ и $m \not\in M$.

Для $\zeta < m$ и $i \in N$ полагаем

$$f(\zeta, i) = \{t \in A : t(\zeta) = i\}.$$

Пусть B — m-полное поле подмножеств A, порожденное множеством

$$\{f(\zeta, i) : \zeta < m, \quad i \in N\}$$

мощности $\leqslant m$. Поскольку $\overline{\overline{A}} = m$ и m регулярен (ввиду того, что $m \not\in C_0$, а $SN \subseteq C_0$), то множество $I = B \cap S_m(A)$ — нетривиальный m-полный идеал в B. Кардинал $m \not\in C_0$; тогда согласно [3, 3.1] идеал I расширяется до m-полного примарного идеала E в B. Для любого $\zeta < m$ $\bigcup_{i \in N} f(\zeta, i) = A$, и так как $\overline{\overline{N}} = \omega < m$, то для любого $\zeta < m$ можно выбрать $n(\zeta) \in N$ такое, что $f(\zeta, n(\zeta)) \in B \setminus E$. Поэтому точка u в N^m, определяемая точками $n(\zeta)$:$\zeta < m$, обладает тем свойством, что для любого $y \in S_\omega(m) \bigcap_{\zeta \in y} f(\zeta, u(\zeta)) \in B \setminus E$.

Так как любой член $B \setminus E$ содержит бесконечное подмножество A, то u — точка накопления для A и теорема доказана.

В случае $m^{\underline{m}} = \Sigma_{\alpha < m} m^\alpha = m$ этот результат приводится в [3]. Аналогичный факт отмечается в [2].

Из теоремы 1 и отмеченного в [2] включения $M \subseteq U$ получаем $M \subseteq U \cap C_0$.

Следующее предложение 1 свидетельствует о замкнутости класса M относительно обычных операций с кардиналами (ср. доказательство в [2]).

Предложение 1. Имеет место:

1) $\omega_1 \in M$; если же $\omega_\xi \in M$, то и $\omega_{\xi+1} \in M$;

2) если $m_\xi \in M$ для любого $\xi < \omega_\alpha$ и $\omega_\alpha \in M$, то $\Sigma_{\xi < \omega_\alpha} m_\xi \in M$.

Из предложения 1 в частности вытекает, что все кардиналы, меньшие первого слабо недостижимого, содержатся в классе M.

Известно, что многие недостижимые кардиналы лежат в классе C_0. Однако, приводимая ниже теорема также позволяет доказать принадлежность классу M многих недостижимых кардиналов.

Теорема 2. *Если* $m^{\underline{m}} = m$ *и* $m \in C_0$, *то для некоторой последовательности* $X_{n_\zeta} : \zeta < m$, *дискретных пространств с* $< m$ *членами*, $X_{n_\zeta} < m$, *имеет место*

$$X_m \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} \Pi_{\zeta < m} X_{n_\zeta}.$$

По поводу доказательства теоремы 2 см. [3].

Предложение 2. Если $C \neq C_0$ (или же если $C \neq U$), то $M \neq U$.

Действительно, если $C \neq C_0$ или $C \neq U$ (т. е. $C \neq C_1$), то согласно теореме 3.4 [3] наименьший кардинал c_0 из $C \setminus C_0$ будет принадлежать U. Тогда ввиду теоремы 1 $c_0 \not\in M$, т. е. $M \neq U$.

Предложение 2 не дает, однако, полного ответа на вопрос о том, когда $M = U$, так как в нем не рассматривается теоретико-множественное условие $C = C_0$, т. е. случай несуществования компактных кардиналов. В этом смысле следующая теорема дает полный ответ на вопрос о равенстве $M = U$.

Теорема 3. *Если все слабо недостижимые кардиналы строго недостижимы, то $M = C_0 \cap U$ при $2^\alpha = \alpha^+$, $\alpha \notin C_0$.*

Доказательство. Докажем индукцией по ξ, что $\omega_\xi \in M$ тогда и только тогда, когда $\omega_\xi \in C_0 \cap U$. Для этого заметим, что $U = \{m : [\omega_1, m] \subseteq \subseteq C_1\}$, т. е. если $m \in U$ и $n < m$, то и $n \in U$.

Согласно предложению 1 для $\xi = 1$, требуемое утверждение доказано. Предположим, что утверждение доказано для всех $\zeta < \xi$. Если $\xi = \zeta + 1$, то ввиду предложения 1 и того, что $\omega_{\zeta+1} \in C_0$ [2] утверждение доказано для ξ. Если ω_ξ — сингулярен, т. е. $\omega_\xi = \Sigma_{\zeta<\omega_\alpha} \omega_{n_\zeta}$, где $n_\zeta < \xi$ и $\alpha < \xi$, то $\omega_\xi \in C_0$, поэтому по предложению 1 в этом случае утверждение доказано для ξ. Пусть, наконец, ω_ξ — регулярный, а ξ — предельный, т. е. ω_ξ недостижим, и тогда $\omega_\xi^{\omega_\xi} = \omega_\xi$. Если $m = \omega_\xi \in C_0 \cap U$, то ввиду теоремы 2

$$X_m \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} \Pi_{\zeta<m} X_{n_\zeta}, \text{ где } n_\zeta < m.$$

Поскольку $m \in U$, то $n_\zeta \in U$. Тогда согласно [2, 1.2] имеет место $X_{n_\zeta} \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} N^{2^{n_\zeta}}$, где $2^{n_\zeta} < m$, так как m — строго недостижим. Поэтому

$$X_m \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} \Pi_{\zeta<m} X_{n_\zeta} \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} \Pi_{\zeta<m} N^{2^{n_\zeta}} \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} N^m$$

и $m \in M$. Теорема доказана.

Следствие 1. *При обобщенной континуум-гипотезе (GCH). $M = C_0 \cap U$.*

Теорема 3 и предложение 2 дают полный ответ на вопрос Мрувки [2].

Следствие 2 (*GCH*). *Если $C \neq C_0$, то $M \neq U$. Если же $C = C_0$, то $M = U$.*

Таким образом, равенство $M = U$ исследовано полностью в зависимости от существования или несуществования компактных кардиналов.

Аналогичный общий результат о равенстве $M = U$, зависящий лишь от существования или несуществования измеримых кардиналов, вообще говоря, невозможен. В самом деле, если существует кардинал k такой, что $k \to (\omega)_2^{<\omega}$ (заметим, что наименьший такой кардинал неизмерим по Уламу), то согласно результату Дж. Сильвера [6] с $V = L$ совместимо $C \neq C_0$. Однако при $V = L$ будет $U = C$ и потому по теореме 3 $M = C_0 \neq U$. Следовательно, условия $M = U = C$ и $M \neq U = C$ могут быть совместимы с теорией множеств.

В заключение отметим, что из теоремы 3 вытекает следующая теоретико-множественная характеристика класса M (ср. [3]).

Теорема 4. *Если все слабо недостижимые кардиналы строго недостижимы, то $m \in M$ тогда и только тогда, когда существует m-полное поле подмножеств m, порожденное множеством мощности $\leqslant m$, всякий ω_1-полный идеал, в котором — главный, если $2^\alpha = \alpha^+$, $\alpha \in C_0$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Чудновский, E-компактность и свойства измеримости, II, Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям, Кишинев, 1969.
2. S. Mrowka, On E-compact spaces, Bull. Acad. Polon Sci., v. 14, N 11, 1966, 597—605.
3. H. I. Keisler, A. Tarski, From accessible to inaccessible cardinal, Fund. Math., v. 53, N 3, 1964, 225—308.
4. К. Куратовский, Топология, т. I, «Мир», М., 1966.

5. D. S c o t t, Measurable cardinals and constructible sets, Bull. Acad. Polon. Sci., v. 9, 1961, 521—524.
6. J. S i l v e r, Some applications of model-theory in set theory, Doctoral dissertations, 1966.

Поступила 31.VII 1970 г.
Институт механики АН УССР