УДК 517.535.4

Об одном неравенстве для целых функций

М. Н. Шеремета

Пусть

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

— целая трансцендентная функция конечного порядка. Скажем, что $f(z)$ имеет борелевское исключительное значение $A \neq \infty$, если $f(z)=A+F(z)\times$ $\times \exp\{bz^p\}$, где p — натуральное число, равное порядку функции $f(z)$, $b \equiv \mathrm{const}\,(b \neq 0, \infty)$, а $F(z)$ — целая функция, рост которой не превышает минимального типа порядка p. Обозначим через $m(r,f)$ и $M(r,f)$ соответственно минимум и максимум модуля функции $f(z)$ на $|z|=r$, а через $\mu(r,f)$ и $\nu(r,f)$ — соответственно максимальный член и центральный индекс ряда (1). В работе [1] доказано, что если целая функция $f(z)$ конечного порядка имеет борелевское исключительное значение и в разложении (1) все $a_n \geqslant 0$, начиная с некоторого $n=N$, то

$$\varlimsup_{r\to\infty} \frac{\mu(r,f)}{M(r,f)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Нашей целью является обобщение этого результата, т. е. докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $f(z)$ — целая трансцендентная функция, представленная рядом* (1), *удовлетворяет условию*

$$m(r,f)=o(M(r,f)), \quad r\to\infty. \tag{2}$$

Положим $G_f(z)=f(z)-a_\nu z^\nu$, $\nu=\nu(r,f)$. Тогда имеет место неравенство

$$V_f=\varliminf_{r\to\infty} \frac{M(r,G_f)}{M(r,f)} \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Доказательство. Из определения функции $G_f(z)$ имеем

$$|a_\nu|r^\nu - M(r,G_f) \leqslant |f(z)| \leqslant |a_\nu|r^\nu + M(r,G_f),$$

причем эти неравенства выполняются для всех z, $|z|=r$, в том числе и для тех z, для которых $|f(z)|=m(r,f)$ или $|f(z)|=M(r,f)$. Поэтому

$$|a_\nu|r^\nu - M(r,G_f) \leqslant m(r,f) \leqslant M(r,f) \leqslant |a_\nu|r^\nu + M(r,G_f),$$

откуда

$$M(r,f) \leqslant 2M(r,G_f)+m(r,f).$$

Из последнего неравенства, ввиду условия (2), получаем неравенство (3).

Покажем теперь, что неравенство (3) улучшить нельзя. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Существует функция $f(z)$, удовлетворяющая условию* (2), *для которой $V_f=\dfrac{1}{2}$.*

Доказательство. Пусть $\{\lambda_n\}$ — последовательность натуральных чисел, удовлетворяющих условиям

$$\lambda_0 = 3,\ \lambda_{n+1} = \lambda_n + \varkappa_n,\ \varkappa_n = \left[\frac{\lambda_n}{\ln \lambda_n}\right] \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

где через $[a]$ обозначена целая часть числа a. Очевидно, что $\lambda_n \to \infty$ и $\varkappa_n/\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Рассмотрим целую функцию

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{z^{\lambda_n}}{\lambda_n!} + \frac{z^{\lambda_n+1}}{(\lambda_n+1)!}\right\}. \tag{5}$$

Очевидно, что для функции (5) выполняется

$$M(r, f) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{r^{\lambda_n}}{\lambda_n!} + \frac{r^{\lambda_n+1}}{(\lambda_n+1)!}\right\} \geqslant \frac{r^{\lambda_j}}{\lambda!} \tag{6}$$

для всех r, $0 \leqslant r < \infty$, и всех $j = 0, 1, 2, \ldots$.

При достаточно больших j существует такое натуральное число m, для которого выполняются неравенства

$$6\lambda_j \leqslant \lambda_m \leqslant 7\lambda_j, \qquad j + 2 \leqslant m. \tag{7}$$

Действительно, выберем из всех натуральных k, для которых $6\lambda_j \leqslant \lambda_k$, наименьшее число m. Тогда $6\lambda_j \leqslant \lambda_m$ и $\lambda_{m-1} < 6\lambda_j$, т. е., ввиду (4), при достаточно больших j имеем $\lambda_m < 6\lambda_j + \varkappa_{m-1} \leqslant 6\lambda_j + \left[\frac{\lambda_{m-1}}{\ln \lambda_{m-1}}\right] \leqslant 6\lambda_j + \left[\frac{6\lambda_j}{\ln 6\lambda_j}\right] \leqslant 7\lambda_j$. Далее, так как при достаточно больших j выполняется $\lambda_{j+2} = \lambda_j + \varkappa_j + \varkappa_{j+1} \leqslant 2\lambda_j$, а $\lambda_m \geqslant 6\lambda_j$, то $j + 2 \leqslant m$. В дальнейшем будем считать, что число j настолько велико, что существует число m, удовлетворяющее неравенствам (7).

Пусть $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}$. Разобьем сумму (5) следующим образом:

$$f(z) = f_{j1}(z) + P_j(z) + f_{j2}(z) + f_{j3}(z), \tag{8}$$

где

$$f_{j1}(z) = \sum_{n=0}^{j-1} \left\{\frac{z^{\lambda_n}}{\lambda_n!} + \frac{z^{\lambda_n+1}}{(\lambda_n+1)!}\right\}, \qquad f_{j2}(z) = \sum_{n=j+2}^{m-1} \left\{\frac{z^{\lambda_n}}{\lambda_n} + \frac{z^{\lambda_n}}{(\lambda_n+1)!}\right\},$$

$$f_{j3}(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \left\{\frac{z^{\lambda_n}}{\lambda_n!} + \frac{z^{\lambda_n+1}}{(\lambda_n+1)!}\right\},$$

а

$$P_j(z) = \frac{z^{\lambda_j}}{\lambda_j!} + \frac{z^{\lambda_j+1}}{(\lambda_j+1)!} + \frac{z^{\lambda_{j+1}}}{\lambda_{j+1}!} + \frac{z^{\lambda_{j+1}+1}}{(\lambda_{j+1}+1)!}, \tag{9}$$

и оценим $M(r, f_{ji})$, $i = 1, 2, 3$, при $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}$.

Так как выражение $r^m/m!$ при $0 \leqslant m \leqslant [r] - 1$ возрастает с ростом m, то для всех r, $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}$, ввиду того, что $\lambda_{j-1} + 1 < \lambda_j$ при достаточно больших j, имеем

$$M(r, f_{j1}) \leqslant \sum^{\lambda_{j-1}+1} \frac{r^n}{n!} \leqslant (\lambda_{j-1} + 1)\frac{r^{\lambda_{j-1}+1}}{(\lambda_{j-1}+1)!} = \frac{r^{\lambda_{j-1}+1}}{\lambda_{j-1}!}.$$

Поэтому, ввиду (6), получаем при $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}$ и достаточно больших j, что

$$\frac{M(r, f_{j1})}{M(r, f)} \leqslant \frac{r^{\lambda_{j-1}+1-\lambda_j}\lambda_j!}{\lambda_{j-1}!} \leqslant \frac{\lambda_j^{\lambda_{j-1}+1-\lambda_j}\lambda_j!}{\lambda_{j-1}!} =$$

$$= \exp\{(\lambda_{j-1} + 1 - \lambda_j)\ln\lambda_j + \lambda_j \ln\lambda_j - \lambda_j - \lambda_{j-1}\ln\lambda_{j-1} + \lambda_{j-1} + O(\ln\lambda_j)\} =$$

$$= \exp\left\{\lambda_{j-1}\ln\left(1 + \frac{\varkappa_{j-1}}{\lambda_{j-1}}\right) - \varkappa_{j-1} + O(\ln\lambda_j)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\lambda_{j-1}\left[\frac{\varkappa_{j-1}}{\lambda_{j-1}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa_{j-1}}{\lambda_{j-1}}\right)^2(1 + o(1))\right] - \varkappa_{j-1} + O(\ln\lambda_j)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\frac{1 + o(1)}{2}\,\frac{\lambda_{j-1}}{\ln^2\lambda_{j-1}}\right\},$$

откуда следует, что $M(r, f_{j1}) = o(M(r, f))$ при $r \to \infty$, $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}$.

Оценим теперь $M(r, f_{j2})$ при $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}$. Очевидно, что при $n > [r] + 1$ выражение $r^n/n!$ убывает с ростом n. Поэтому для всех r, $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}$, при достаточно больших j имеем

$$M(r, f_{j2}) \leqslant \frac{r^{\lambda_{j+2}}}{\lambda_{j+2}!}(\lambda_m + 1) \leqslant 8\lambda_j\,\frac{r^{\lambda_{j+2}}}{\lambda_{j+2}!}.$$

Тогда при $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{+j1}$ выполняется

$$\frac{M(r, f_{j2})}{M(r, f)} \leqslant 8\lambda_{j+1}\,\frac{r^{\lambda_{j+2}}\lambda_{j+1}!}{\lambda_{j+2}!\,r^{\lambda_{j+1}}} \leqslant 8\lambda_{j+1}\,\frac{\lambda_{j+1}^{\lambda_{j+2}-\lambda_{j+1}}\lambda_{j+1}!}{\lambda_{j+2}!} =$$

$$= \exp\{(\lambda_{j+2} - \lambda_{j+1})\ln\lambda_{j+1} + \lambda_{j+1}\ln\lambda_{j+1} - \lambda_{j+1} - \lambda_{j+2}\ln\lambda_{j+2} +$$
$$+ \lambda_{j+2} + O(\ln\lambda_{j+1})\} =$$

$$= \exp\left\{-(\lambda_{j+1} + \varkappa_{j+1})\left[\ln\lambda_{j+1} + \ln\left(1 + \frac{\varkappa_{j+1}}{\lambda_{j+1}}\right)\right] + \varkappa_{j+1} + O(\ln\lambda_{j+1})\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\lambda_{j+1}\left[\frac{\varkappa_{j+1}}{\lambda_{j+1}} - \frac{1 + o(1)}{2}\left(\frac{\varkappa_{j+1}}{\lambda_{j+1}}\right)^2\right] - \varkappa_{j+1}\,\frac{\varkappa_{j+1}}{\lambda_{j+1}}(1 + o(1)) + \varkappa_{j+1} +\right.$$
$$\left. + O(\ln\lambda_{j+1})\right\} = \exp\left\{-\frac{1 + o(1)}{2}\,\frac{\lambda_{j+1}}{\ln^2\lambda_{j+1}}\right\},$$

откуда получаем, что при $r \to \infty$, $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}$, выполняется $M(r, f_{j2}) = o(M(r, f))$.

И, наконец, ввиду того, что $\lambda_m \geqslant 6\lambda_j$ для всех r, $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}$, имеем

$$M(r, f_{j3}) = \sum_{n=m}^{\infty}\left\{\frac{r^{\lambda_n}}{\lambda_n!} + \frac{r^{\lambda_n+1}}{(\lambda_n + 1)!}\right\} \leqslant \sum_{n=\lambda_m}^{\infty}\frac{r^n}{n!} = \sum_{n=\lambda_m}^{\infty}\left(\frac{re}{n(1 + o(1))}\right)^n \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=\lambda_m}^{\infty}\left(\frac{e\lambda_{j+1}}{\lambda_m(1 + o(1))}\right)^n \leqslant \sum_{n=\lambda_m}^{\infty}\left(\frac{e}{6(1 + o(1))}\right)^h \leqslant B,$$

где B — некоторая постоянная величина, $0 < B < \infty$, откуда получаем, что $M(r, f_{j3}) = o(M(r, f))$ при $r \to \infty$ и $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}$.

Итак, ввиду (8), получаем, что при $r \to \infty$ выполняется

$$f(z) = P_j(z) + o(M(r, f)), \qquad \lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}. \tag{10}$$

Перейдем теперь к рассмотрению функции $P_j(z)$. Ввиду (9) имеем

$$M(r, P_j) \geqq \frac{r^{\lambda_j}}{\lambda_j!} + \frac{r^{\lambda_{j+1}}}{\lambda_{j+1}!}, \tag{11}$$

а при $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}$ выполняется

$$m(r, P_j) \leqslant |P_j(re^{i\pi})| \leqslant \frac{r^{\lambda_j}}{\lambda_j!}\left|1 - \frac{r}{\lambda_j + 1}\right| + \frac{r^{\lambda_{j+1}}}{\lambda_{j+1}!}\left|1 - \frac{r}{\lambda_{j+1} + 1}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r^{\lambda_j}}{\lambda_j!}\left(\frac{\lambda_{j+1}}{\lambda_j + 1} - 1\right) + \frac{r^{\lambda_{j+1}}}{\lambda_{j+1}!}\left(1 - \frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1} + 1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{r^{\lambda_j}}{\lambda_j!} + \frac{r^{\lambda_{j+1}}}{\lambda_{j+1}!}\right) \max\left\{\frac{\varkappa_j - 1}{\lambda_j + 1}, \ \frac{\varkappa_j + 1}{\lambda_j + \varkappa_j + 1}\right\}.$$

Из последнего неравенства и неравенства (11), ввиду того, что $\varkappa_j/\lambda_j \to 0$ при $j \to \infty$, получаем, что $m(r, P_j) = o(M(r, P_j))$, т. е.

$$m(r, P_j) = o(M(r, f)), \qquad \lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}, \tag{12}$$

при $r \to \infty$. Из равенства (10) и (12) получаем, что для всех r, $\lambda_j \leqslant r \leqslant \lambda_{j+1}$, и при $r \to \infty$ выполняется

$$\frac{m(r, f)}{M(r, f)} \leqslant \frac{m(r, P_j) + o(M(r, f))}{M(r, f)} = \frac{o(M(r, f))}{M(r, f)} = o(1),$$

откуда следует выполнение условия (2).

Перейдем теперь к доказательству того факта, что для функции (5) выполняется $V_f = \dfrac{1}{2}$. Прежде всего отметим, что $\nu(\lambda_j, f) = \lambda_j$. Далее запишем

$$P_j(z) = P_{j1}(z) + P_{j2}(z), \tag{13}$$

где

$$P_{j1}(z) = \frac{z^{\lambda_j}}{\lambda_j!} + \frac{z^{\lambda_j + 1}}{(\lambda_j + 1)!}, \qquad P_{j2}(z) = \frac{z^{\lambda_{j+1}}}{\lambda_{j+1}!} + \frac{z^{\lambda_{j+1} + 1}}{(\lambda_{j+1} + 1)!},$$

и оценим $M(\lambda_j, P_{j2})$. Очевидно, что

$$M(\lambda_j, P_{j2}) = \frac{\lambda_j^{\lambda_{j+1}}}{\lambda_{j+1}!}\left(1 + \frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1} + 1}\right) \leqslant 2\frac{\lambda_j^{\lambda_{j+j}}}{\lambda_{j+1}!}.$$

Тогда, ввиду (6), имеем

$$\frac{M(\lambda_j, P_{j2})}{M(\lambda_j, f)} \leqslant 2\frac{\lambda_j^{\lambda_{j+1}}\lambda_j!}{\lambda_{j+1}!\,\lambda_j^{\lambda_j}} =$$

$$= 2\exp\left\{-\lambda_{j+1}\ln\left(1 + \frac{\varkappa_j}{\lambda_j}\right) + \varkappa_j + \frac{1}{2}\ln\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}} + o(1)\right\} =$$

$$= 2\exp\left\{\varkappa_j - (\lambda_j + \varkappa_j)\left(\frac{\varkappa_j}{\lambda_j} - \frac{1 + o(1)}{2}\left(\frac{\varkappa_j}{\lambda_j}\right)^2\right) + o(1)\right\} =$$

$$= 2\exp\left\{-\frac{1 + o(1)}{2}\,\frac{\lambda_j}{\ln^2\lambda_j}\right\},$$

т. е. $M(\lambda_j, P_{j2}) = o(M(\lambda_j, f))$ при $j \to \infty$. Итак, учитывая равенства (10) и (13), получаем при $|z| = \lambda_j$, что

$$f(z) = P_{j1}(z) + o(M(\lambda_j, f)), \qquad j \to \infty. \tag{14}$$

Так как $\nu(\lambda_j, f) = \lambda_j$, то при $|z| = \lambda_j$, ввиду (14), имеем

$$G_f(z) = \frac{z^{\lambda_j+1}}{(\lambda_j+1)!} + o(M(\lambda_j, f)), \qquad j \to \infty,$$

а

$$M(\lambda_j, G_f) = \frac{\lambda_j^{\lambda_j+1}}{(\lambda_j+1)!} + o(M(\lambda_j, f)), \qquad j \to \infty. \tag{15}$$

С другой стороны, из (14) получаем

$$M(\lambda_j, f)(1 + o(1)) = M(\lambda_j, P_{j1}) = \frac{\lambda_j^{\lambda_j}}{\lambda_j!}\left(1 + \frac{\lambda_j}{\lambda_j+1}\right). \tag{16}$$

Из равенств (15) и (16) имеем

$$\frac{M(\lambda_j, G_f)}{M(\lambda_j, f)} = \frac{\lambda_j(1 + o(1))}{2\lambda_j + 1} = \frac{1}{2}(1 + o(1))$$

при $j \to \infty$, откуда следует, что

$$V_f \leqslant \lim_{j\to\infty} \frac{M(\lambda_j, G_f)}{M(\lambda_j, f)} = \frac{1}{2}.$$

Последнее неравенство вместе с теоремой 1 дают равенство $V_f = \frac{1}{2}$. Тем самым теорема 2 полностью доказана.

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Гольдбергу за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Alfred Gray, S. M. Shah, Borel exceptional values of entire functions, Math. Ann., Bd. 175, 1968.

Поступила 19.XII 1969 г.
Львовский государственный университет