УДК 517.512.6

Наилучшее приближение некоторых функций

И. А. Эзрохи

В развитие результатов [1, 2] дается наилучшее приближение некоторых функций тригонометрическими полиномами в равномерной и интегральной метрике, которые характеризуют остаточные члены и их точные оценки некоторых формул приближения (см., например, [2, стр. 797, 789]).

Лемма 1 (обобщение теоремы Ролля). *Пусть дифференциальное уравнение*

$$L_k(y) = y^{(k)} + a_1(x)\, y^{(k-1)} + \ldots + a_k(x)\, y = 0$$

имеет k интегралов $\varphi_0(x), \ldots, \varphi_{k-1}(x)$, все последовательные вронскианы которых:

$$W_i = W(\varphi_0(x), \ldots, \varphi_i(x)),\ i = 0, 1, \ldots, k-1,$$

отличны от нуля на промежутке (a, b). Тогда, если k раз дифференцируемая функция $f(x)$ имеет на промежутке (a, b) m $(m > k)$ нулей с учетом их кратности, то функция $L_k(f(x))$ имеет на промежутке (a, b) по крайней мере $m - k$ нуля. Если же k раз дифференцируемая функция имеет на промежутке (a, b) m $(m > k)$ перемен знака, то $L_k(f(x))$ имеет на промежутке (a, b) по крайней мере $m - k$ перемен знака.

Доказательство леммы в обоих случаях при $m > k + 1$ проводится так же, как и при $m = k + 1$ [3, стр. 66; 4, стр. 51], если учесть, что теорему Ролля можно сформулировать и так: если дифференцируемая функция имеет на промежутке (a, b) две перемены знака, то ее производная хотя бы один раз меняет знак на этом промежутке. Пусть впредь

$$P_{2\mu}(r) = \prod_{l=1}^{\mu}(r^2 + l^2);\ \ P_0(r) \equiv 1;\ \ P_{2\mu+p}(r) = r^p P_{2\mu}(r);$$

$$Q_{2k}(r) = \prod_{l=1}^{k}(r^2 + (2l - 1)^2);\quad Q_0(r) \equiv 1;\ \ Q_{2k+s}(r) = r^s Q_{2k}(r);$$

$$R_{2\nu}(r) = \prod_{l=1}^{\nu}(r^2 + \alpha_l^2).$$

Лемма 2. *При любых целых μ и p дифференциальные операторы*

$$P_{2\mu+p+1}\left(\frac{d}{dx}\right);\ \ P_{2\mu+p+1}\left(i\frac{d}{dx}\right);\ \ Q_{2\mu+p}\left(i\frac{d}{dx}\right);\quad R_{2\nu}\left(i\frac{d}{dx}\right)$$

удовлетворяют всем условиям леммы 1 на любом открытом промежутке длины 2π, а оператор $Q_{2\mu+p}\left(\frac{d}{dx}\right)$ на промежутке длины π.

Справедливость этой леммы вытекает из [1, стр. 661—663; 3, стр. 128, п. 60].

Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ k-кратно монотонна, если

$$\Delta a_n = a_n - a_{n+1} \geqslant 0;\ \ \Delta^2 a_n = \Delta a_n - \Delta a_{n+1} \geqslant 0; \ldots;$$

$$\Delta^k a_n = \Delta^{k-1} a_n - \Delta^{k-1} a_{n+1} \geqslant 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ абсолютно монотонна, если при любом k и всех n $\Delta^k a_n \geqslant 0$.

Лемма 3. *Если последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ такова, что при всех $n = 1, 2, \ldots$:*

1) $a_n = \dfrac{1}{n^t}$, *то она абсолютно монотонна при $t \geqslant 0$ и $n \geqslant 1$;*

2) $a_n = \dfrac{n^s}{n^2 - a^2}$, *то последовательность такова же для $n > a$, $s = 0, 1, 2$;*

3) $a_n = \dfrac{1}{n^2 + a^2}$, *то последовательность дважды монотонна для $n > \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ и трижды монотонна для $n > a$;*

4) $a_n = \dfrac{n}{n^2 + a^2}$, *то последовательность монотонна для $n > a$, дважды монотонна для $n > a\sqrt{3}$,* трижды — для $n > a\sqrt{7}$.

Отметим еще, что сумма и произведение двух k-кратно монотонных последовательностей будет также k-кратно монотонной последовательностью.

Пусть $\mathscr{E}_{2\nu_k}(r)$ и $T_{2\nu_k}(r)$ — любые четные многочлены степени $2\nu_k$ вещественные нули которых не кратны n и не равны $(2k+1)n$ $(k=0,1,\ldots)$ соответственно, и такие, что дифференциальные операторы $\mathscr{E}_{2\nu_k}\left(i\frac{d}{dx}\right)$ и $T_{2\nu_k}\left(i\frac{d}{dx}\right)$ удовлетворяют условиям леммы 1 на открытом промежутке $(0,\pi)$ при любом k

$$\mathscr{E}_{2\nu_1+\ldots+2\nu_k}(r)=\prod_{l=l}^{k}\mathscr{E}_{2\nu_l}(r);\quad T_{2\nu_1+\ldots+2\nu_k}(r)=\prod_{l=1}^{k}T_{2\nu_l}(r).$$

Пусть многочлен $R_{2\nu}(r)$ таков, что $\max\ (\alpha_1^2,\ \alpha_2^2,\ldots)<n^2$, а четный многочлен $K_{2m}(r)$ таков, что его корни, вещественные или мнимые, по абсолютной величине также меньше n.

Пусть последовательности $a_1,\ a_2,\ldots$ дважды, а $b_0,\ b_1,\ b_2,\ldots$ просто монотонны, стремятся к нулю и таковы, что функции

$$f_{s,\mu,t,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k\sin\left(knx-s\frac{\pi}{2}\right)}{|R_{2\mu+t}(ink)|\,\mathscr{E}_{2\nu_1+\ldots+2\nu_k}(nk)}\tag{1}$$

$$l_{s,m,\lambda,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k\sin\left((2k+1)nx-s\frac{\pi}{2}\right)}{|K_{2m+\lambda}[(2k+1)in]|\,T_{2\nu_1+\ldots+2\nu_k}[(2k+1)n]}\ ,\tag{2}$$

$$2\mu+t\geqslant 0;\ 2m+\lambda\geqslant 0;\ s\geqslant 0;\ 0\leqslant 2\nu_l<n,$$

интегрируемы при $\mu=t=s=m=\lambda=\nu_1=\ldots=\nu_k=0$, t и λ вообще не целые.

Утверждение 1. Наилучшим приближением тригонометрическими многочленами порядка меньше n честности «$s+1$» в метрике $L[0,\pi]$ функции (1) при условии $\sum_{l=1}^{k}\nu_l(2\mu+t-s)\geqslant 0$ является постоянная

$$A_{s,\mu,t,\nu_1,\ldots,\nu_k}=\frac{1}{2}[1-(-1)^s]\,f_{s,\mu,t,\nu_1,\ldots,\nu_k}\left[(2l+1)\frac{\pi}{2n}\right],$$

а функции (2) при условии $\sum_{l=1}^{k}\nu_l(2m+\lambda-s)\geqslant 0$ — нуль. При этом

$$E_{n-1}(f_{s,\mu,t,\nu_1\ldots,\nu_k})_L=2\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{ks}a_{2k+1}}{(2k+1)\,|P_{2\mu+t}((2k+1)in)|\,\mathscr{E}_{2\nu_1+\ldots+2\nu_k}((2k+1)n)}\right|,$$

$$E_{n-1}(l_{s,m,\lambda,\nu_1\ldots,\nu_k})_L=2\left|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{ks}b_k}{(2k+1)\,|K_{2m+\lambda}((2k+1)in)|\,T_{2\nu_1+\ldots+2\nu_k}((2k+1)n)}\right|.$$

Справедливость этого утверждения вытекает, в силу теоремы А. Маркова [5, стр. 98], из следующих лемм.

Лемма 4. *При сделанных ранее предположениях имеют место следующие неравенства*:

$$\sin nx\cdot f_{0,\mu,t,0,\ldots,0}(x)\geqslant 0,\tag{3}$$

$$\sin nx\cdot l_{0,m,\lambda,0,\ldots,0}(x)\geqslant 0.\tag{4}$$

Справедливость неравенства (3) может быть установлена тем же методом, что и критерий С.-Надя [5, стр. 203; 6], если учесть лемму 3. Справедливость неравенства (4) устанавливается, в силу леммы 3, с помощью преобразования Абеля:

$$\sin nx \cdot \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin (2k+1) nx = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta b_k \sin^2 knx.$$

Лемма 5. *Функции* $f_{0,\mu,t,\nu_1 \ldots \nu_k}(x)$ *и* $l_{0,m,\lambda,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x)$ *при* $2\nu_l < n$ $(l = 1, \ldots, k)$ *меняют знак на промежутке* $(0, \pi)$ *в точках* $x = \frac{l\pi}{n}$ $(l = 1, \ldots, n-1)$ *и только в них.*

Справедливость первого утверждения следует из того, что эти функции имеют период $\frac{2\pi}{n}$ и нечетны. Что касается второго утверждения, то если допустить, что эти функции меняют знак и на промежутке $\left(0, \frac{\pi}{n}\right)$, то окажется, что у этих функций должно быть $2n-1$ перемен знака на промежутке $(0, \pi)$. Следовательно, в силу леммы 1, функции

$$\mathscr{E}_{2\nu_1}\left(i \frac{d}{dx}\right) f_{0,\mu,t,\nu,0,\ldots,0}(x) = f_{0,\mu,t,0,\ldots,0}(x),$$

$$T_{2\nu_1}\left(i \frac{d}{dx}\right) l_{0,m,\lambda,\nu_1 0,\ldots,0}(x) = l_{0,m,\lambda,0,\ldots,0}(x)$$

должны иметь на промежутке $(0, \pi)$ не менее $2n - 1 - 2\nu_1 > n - 1$ перемен знака, что противоречит лемме 4. Остается применить индукцию.

Лемма 6. *Функции*

$$f_{1,\mu,t,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x) - A_{1,\mu,t,\nu_1,\ldots,\nu_k}, \quad l_{1,m,\lambda,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x)$$

при $2\mu + t \geqslant 1$ *и* $2m + \lambda \geqslant 1$ *меняют знак на промежутке* $(0, \pi)$ *в точках* $x = (2l+1)\frac{2}{2n}$ $(l = 0, 1, \ldots, n-1)$ *и только в них.*

Действительно, производные этих функций соответственно равны:

$$f_{0,\mu,t-1,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x), \quad l_{0,m,\lambda-1,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x)$$

и в точках $x = (2l+1)\frac{\pi}{2n}$ принимают одно и то же значение со знаком $(-1)^l$. Перемен знака в других точках быть не может в силу лемм 1 и 5.

Замечание 1. Лемма 6 и утверждение 1 имеют место при $\sum_{i=1}^{k} \nu_i = 0$ $2\mu + 1 = 0$, $2m + \lambda = 0$, если потребовать при $s = 1$ трижды монотонность последовательности $a_1, a_2, \ldots$ [5, стр. 203; 6] и трижды монотонность для последовательности $b_0, b_1, \ldots$ ибо в этом случае, в силу леммы 4,

$$4 \sin^2 nx \cos nx \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos (2k+1) nx = \sin 2nx \sum_{k=1}^{\infty} \Delta b_{k-1} \sin 2knx \geqslant 0.$$

Замечание 2. При $2\mu + t \geqslant 1 + s$ и $2m + \lambda \geqslant 1 + s$ ограничение $2\nu_i < n$ может быть заменено на $\nu_i < n$, если, например, потребовать монотонность и положительность последовательности $\{\mathscr{E}^{-1}_{2\nu_1 + \ldots + 2\nu_k}(kn)\}$.

Утверждение 2. Наилучшим приближением функции $f_{1,\mu,t,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x)$ четными тригонометрическими полиномами в метрике $C[0,\pi]$ порядка $< n$ при $2\mu + t \geqslant 1$ является постоянная

$$B_{\mu,t,\nu_1,\ldots,\nu_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{|P_{2\mu+t}(2kin)|\,\mathscr{E}_{2\nu_1+\ldots+2\nu_k}(2kn)}.$$

При этом

$$E_{n-1}^{*}(f_{1,\mu,t,\nu_1,\ldots,\nu_k})_C = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{2k+1}}{|R_{2\mu+t}((2k+1)in)|\,\mathscr{E}_{2\nu_1+\ldots+2\nu_k}[(2k+1)n]}\right|. \quad (5)$$

Действительно, непосредственной проверкой можно убедиться, что разность: $f_{1,\mu,t,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x) - B_{\mu,t,\nu_1,\ldots,\nu_k}$ в точках $x = \frac{l\pi}{n}$ $(l = 0, 1, \ldots, n)$ принимает значение (5) со знаком $(-1)^l$. То что эти и только эти точки будут экстремальными, вытекает из того, что производная этой разности: $f_{0,\mu,t-1,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x)$, в силу леммы 5, меняет знак в этих и только в этих точках. Этим [5, стр. 86] утверждение доказано.

Утверждение 3. Наилучшим приближением функции $l_{s,m,\lambda,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x)$ при $2m + \lambda \geqslant s > 0$ тригонометрическими многочленами четности «$s + 1$» порядка меньше n в метрике $C[0,\pi]$ является нуль. При этом

$$E_{n-1}^{*}(l_{s,m,\lambda,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x))_C = \left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(s+1)} b_k}{|K_{2m+\lambda}[(2k+1)in]|\,T_{2\nu_1+\ldots+2\nu_k}[(2k+1)n]}\right|. \quad (6)$$

Действительно, во-первых,

$$l_{2,m,\lambda,\nu_1,\ldots,\nu_k}\left[(2l+1)\frac{\pi}{2n}\right] = (-1)^{l+1} E_{n-1}^{*}(l_{2,m,\lambda,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x))_C$$

и производная этой функции: $l_{1,m,\lambda-1,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x)$ меняет знак, в силу леммы 6, только в указанных точках.

Во-вторых,

$$l_{1,m,\lambda,\nu_1,\ldots,\nu_k}\left(\frac{l\pi}{n}\right) = (-1)^{l+1} E_{n-1}^{*}(l_{1,m,\lambda,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x))_C$$

и производная этой функции: $l_{0,m,\lambda-1,\nu_1,\ldots,\nu_k}(x)$ меняет знак, в силу леммы 5, только в рассматриваемых точках. В обоих случаях остается применить теорему Чебышева.

Замечание 3. При $s = 2$ и $\nu_i = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ условие $2m + \lambda \geqslant 2$ можно заменить на $2m + \lambda \geqslant 1$, если потребовать трижды монотонность последовательности $b_0, b_1, \ldots$ (см. замечание 1).

Замечание 4. При $m = \nu_1 = \ldots = \nu_k = 0$; $b_k = \frac{1}{2k+1}$; $\lambda = s \geqslant 1$ этот результат известен [7, стр. 89], он справедлив и при $s = 0$, если $\lambda \geqslant 1$ (см. замечание 3 и лемму 3).

ЛИТЕРАТУРА

1. И. А. Эзрохи, Общие формы линейных функционалов и остаточные члены формул приближенного анализа, УМЖ, т. 21, № 5, 1969.
2. И. А. Эзрохи, Остаточные члены некоторых многомерных формул приближения, УМЖ, т. 22, № 6, 1970.
3. Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, т. 2, ГТТИ, М., 1956.
4. И. С. Березин, Н. П. Жидков, Методы вычислений, «Наука», М., 1965.

5. Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимаций, изд. 2, «Наука», М., 1965.
6. Sz. B. Nagy, Über gewisse Extremalfragen bei transformeirten trigonometrischen Entwicklungen, Berichte acad. D. W. iss. Leipzig, **90**, 1938.
7. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.

Поступила 14.V 1971 г.
Украинская сельскохозяйственная академия