К 150-летию со дня рождения П. Л. Чебышева

8 июня 1971 года состоялось заседание Ученого совета Института математики АН УССР, посвященное памяти Пафнутия Львовича Чебышева.

С докладами «О некоторых основных разделах научного творчества П. Л. Чебышева» выступили член-корр. АН УССР Е. Я. Ремез и член-корр. АН УССР А. В. Скороход.

16 мая исполнилось 150 лет со дня рождения одного из величайших математиков всех времен — Пафнутия Львовича Чебышева. Он занимает наряду с Николаем Ивановичем Лобачевским особо почетное место среди плеяды наиболее выдающихся отечественных математиков XIX столетия.

Еще в сравнительно молодом возрасте П. Л. Чебышев вышел в первые ряды мировых ученых, разрешив несколько труднейших проблем в области теории чисел и интегрирования в конечном виде алгебраических дифференциалов.

Но с особой созидательной силой и с наибольшим влиянием на дальнейший ход развития как самой математики, так и ее приложений к проблемам естествознания и техники, проявился творческий гений Чебышева в неразрывно связанной с его именем новой отрасли математики — теории приближения функций, а также в теории вероятностей, развитие которой было им направлено в новое русло.

Фундаментальным вкладам Пафнутия Львовича Чебышева в эти две области в основном и были посвящены, соответственно, доклады Е. Я. Ремеза и А. В. Скорохода, содержание которых здесь приводится в сокращенном извлечении.

Первые основополагающие результаты созданной Чебышевым теории наилучшего равномерного≡*чебышевского* приближения были им получены в мемуаре «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов» (1854), и пришел он к этой теории в ходе своих изысканий по одной из актуальных технических проблем века пара и машиностроения — «предположивши вывести правила расчета параметров для устройства параллелограммов Уатта прямо из свойства этих механизмов».

Конкретно рассматриваемая в мемуаре математическая задача состояла в том, чтобы для фиксированной непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a-h,\ a+h]$ определить n коэффициентов полинома $P_{n-1}(x) = p_1x^{n-1} + \ldots + p_n$ под условием минимизации модуль-максимума отклонений:

$$\max_{a-h\leqslant x\leqslant a+h} |P_{n-1}(x) - f(x)| \equiv L(p_1, \ldots, p_n) = \min! \qquad (1)$$

Величина $L(p_1, \ldots, p_n)$ выражает *уклонение* (равномерное ≡ чебышевское) полинома $P_{n-1}(x)$ от $f(x)$ или, что то же, уклонение разности $P_{n-1}(x) - f(x)$ от нуля.

Предполагая $f(x)$ аналитической на $[a-h,\ a+h]$ и притом $f^{(n)}(a) = 0$; положив $x - a = hz\,(-1 \leqslant z \leqslant 1)$ и исследуя ближе задачу (1) при малых фиксируемых значениях h, Пафнутий Львович приводит округленное до $O(h^{n+1})$ решение вопроса к замечательному частному случаю $(\widetilde{f}(z) = z^n)$ задачи типа (1), где ищется полином $\widehat{T}_n(z)$ степени n с фиксированным значением старшего коэффициента (при z^n), равным 1, наименее уклоняющийся от нуля на отрезке $[-1,1]$. Опираясь на (доказанное им несколько позже) необходимое условие реализации минимакса в общем случае задачи (1), Чебышев весьма остроумным подходом получает для определения точного выражения искомого полинома $\widehat{T}_n(z)$ дифференциальное уравнение первого порядка и, решая последнее, находит

$$\widehat{T}_n(z) = \frac{1}{2^n}\,[(z + \sqrt{z^2-1})^n + (z - \sqrt{z^2-1})^n]. \qquad (2)$$

Непреходящее значение классического мемуара Чебышева «Теория механизмов» в истории математической науки определялось, прежде всего, тем, что здесь им был сформулирован и искусно применен к важной конкретной задаче аппроксимации функций *самый* *принцип минимакса*, играющий столь плодотворную и все возрастающую роль в современной математике и ее приложениях; открытые в этом мемуаре чебышевские полиномы $T_n(x)$, наименее уклоняющиеся от нуля, последовательность этих полиномов при $n = 1, 2, 3 \ldots$ сами по себе оказались бесценным математическим аппаратом с неисчерпаемыми приложениями в математическом анализе, теории функций, в современном численном анализе.

Спустя несколько лет (1857—1859) Чебышевым был представлен Академии наук его наиболее капитальный мемуар с развернутой трактовкой его теории функций, наименее уклоняющихся от нуля, под заглавием «Вопросы о наименьших величинах, связанные с приближенным представлением функций» (Соч. II, 151—235). В качестве аппроксимирующего аппарата $\psi(x; p_1, \ldots, p_n)$ здесь фактически рассматриваются алгебраические выражения трех типов: 1) рациональные полиномы; 2) рациональные дроби с фиксированным знаменателем, отличным от нуля; 3) рациональные дроби с нефиксированными коэффициентами как числителя, так и знаменателя (формальные степени всех рассматриваемых полиномов — фиксированные).

Предварительно П. Л. Чебышев останавливается на фундаментальной для предлагаемого им метода формулировке необходимых условий минимакса для функции более общего вида

$$F(x) \equiv F(x; p_1, \ldots, p_n) = \psi(x; p_1, \ldots, p_n) - f(x), \tag{3}$$

предполагаемой не только непрерывной, но и непрерывно дифференцируемой по x и по параметрам p_j. Предполагая, сверх того, конечным число точек $x_1, \ldots, x_m \in [a, b] \equiv [-h, h]$, в которых достигается модуль-максимума $L \equiv L(p_1, \ldots, p_n)$ функции F (т. е. точек уклонения по принятой ныне терминологии), он доказывает отсутствие минимакса, если в матрице

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F(x_1)}{\partial p_1} & \frac{\partial F(x_1)}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial F(x_1)}{\partial p_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial F(x_m)}{\partial p_1} & \frac{\partial F(x_m)}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial F(x_m)}{\partial p_n} \end{pmatrix} \tag{4}$$

первых частных производных по параметрам $p_1 \ldots p_n$ в точках уклонения $x_1, \ldots, x_m$ все m строк являются линейно независимыми, поскольку в таком случае можно выбрать приращения $\Delta p_1 \; \Delta p_2 \ldots \Delta p_n$ под условием выполнения m равенств вида

$$\left.\begin{aligned} & d_p F(x_i) \equiv \frac{\partial F(x_i)}{\partial p_1}\Delta p_1 + \ldots + \frac{\partial F(x_i)}{\partial p_n}\Delta p_n = k_i F(x_i) \\ & (i = \overline{1, m};\; k_i > 0;\; \text{у Чебышева } k_i = 1) \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

и тогда замена набора $(p_1, \ldots, p_n)$ набором $(p_1 - \omega\Delta p_1, \ldots, p_n - \omega\Delta p_n)$ при достаточно малом положительном ω обеспечит снижение модуль-максимума $L \equiv L(p_1, \ldots, p_n)$:

$$L(p_1 - \omega\Delta p_1, \ldots, p_n - \omega\Delta p_n) < L(p_1, \ldots, p_n). \tag{6}$$

Таким образом, необходимое условие Чебышева для минимакса заключается в том, чтобы между m строками матрицы (5) существовала хотя бы одна линейная зависимость, т. е. чтобы ранг этой матрицы был меньше m. С помощью этого необходимого условия Чебышев и отыскивает требуемую систему значений параметров для каждой из рассматриваемых им конкретных задач. Из самого, примененного Чебышевым, указанного классического рассуждения, устанавливающего необходимость данного условия для минимакса, легко видеть, что нисколько не удлиняя рассуждения, он мог бы усилить формулировку своего необходимого условия, потребовав непосредственно, чтобы ни при каком выборе поправок $\{\Delta p_j\}$ не выполнялась совокупность равенств вида (5); в таком случае его необходимое условие стало бы и достаточным для случая линейно входящих $\{p_j\}$ да и для некоторых весьма важных случаев нелинейно входящих параметров, если заменить дифференциалы $d_p F(x_i)$ соответствующими точными приращениями. При учете сказанного обнаруживается, что необходимое условие Чебышева является весьма близким к широко известному ныне *колмогоровскому* критерию минимакса (1948), имеющему силу для значительно более общих задач в действительной либо комплексной области — хотя бы и при бесконечном множестве точек уклонения. Заложенные здесь П. Л. Чебышевым основы минимаксного метода наилучшего приближения находят в последующие годы систематическое применение в конструировании замечательных шарнирных механизмов Чебышева, хотя в соответствующих его публикациях по теории механизмов детали вычислительной реализации его общего метода не приводятся.

В 1889 г. цикл важнейших теоретических публикаций Пафнутия Львовича о минимаксных задачах пополняется его статьей «О приближенных выражениях квадратного корня переменной через простые дроби», в которой он находит выраженную при помощи эллиптических функций рациональную дробь с числителем и знаменателем заданной степени n, аппроксимирующую $\sqrt{x}$ с минимальным значением модуль-максимума относительных отклонений при $1 \leqslant x \leqslant \frac{1}{k^2}$ $(0<k<1)$ — и этому результату, хотя и не сразу, но по настоящему посчастливилось в сфере актуальнейших технических приложений: спустя сорок с лишним лет он получил прекрасное внедрение в теории электрических фильтров (работы В. Кауэра, дополненные Н. И. Ахиезером), приобретя значение определенного фактора прогресса в современной радиотехнике.

Заметим, что в последующие десятилетия после упомянутых работ В. Кауэра выяснилось, что круг задач теории фильтров и других проблем оптимизации синтеза электрических цепей, решаемых на основе чебышевского принципа минимакса, отнюдь не исчерпывается применениями аналитических результатов, восходящих к указанной статье Чебышева и к известным близким к ней предшествующим результатам Е. И. Золотарева — знаменитого ученика П. Л. Чебышева. Значительное число других задач оптимизации электрических цепей получили эффективное решение с помощью современных более гибких численных методов чебышевского приближения, как это было детально отмечено недавно в обзорной статье американских инженеров Темеша и Калахана «Машинная оптимизация электрических цепей» («Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике», т. 55, № 11, 1967/1968, стр. 65—96).

Задачи техники, относящиеся к паровой машине и связанным с ней проблемам передачи движения, в свое время послужившие столь плодотворным стимулом для его бессмертного мемуара «Теория механизмов», продолжали интересовать Пафнутия Львовича до последних лет его жизни. Решая задачу о *центробежном регуляторе* («уравнителе»), стремясь определить размеры его конструкции под условием наилучшей изохронности (1871), Чебышев приходит в оформленной спустя два года теоретической публикации «О функциях, наименее уклоняющихся от нуля» к постановке и решению совершенно новой задачи из того же класса минимаксных задач аппроксимации, в которой на полином, наименее уклоняющийся от нуля, налагается существенное дополнительное условие — монотонности изменения. Здесь при решении минимаксной задачи находит неожиданное эффективное применение арсенал средств теории квадратического приближения.

Вообще, минимаксные задачи составляли хотя наиболее характерную область исследований Панфутия Львовича Чебышева по теории приближений, но отнюдь не единственную. Разнообразнейшие вопросы интерполирования, метод наименьших квадратов и общая теория ортогональных полиномов (или «полиномов Чебышева» в широком понимании), вопросы проблемы моментов, механические квадратуры — всем этим областям математического анализа, связанным с теорией приближений, Панфутий Львович уделяет большое внимание на протяжении почти всей своей творческой деятельности, и в каждую из указанных областей он вносит вклады, имеющие первостепенное значение не только теоретическое, но и практическое. Научное наследие П. Л. Чебышева в совокупности указанных областей легло в основу одной из плодотворно и интенсивно развивающихся, в СССР и в других странах, ветвей современной математики, которой (по почину академика С. Н. Бернштейна) ныне присвоено наименование *конструктивной теории функций*.

Замечательные работы П. Л. Чебышева, относящиеся к вопросам теории вероятностей, количественно не были многочисленными. Сюда относятся, кроме его магистерской диссертации «Опыт элементарного анализа теории вероятностей» (1845), три публикации, по времени их появления разделенные примерно двадцатилетними промежутками, а именно: «Элементарное доказательство одного общего положения теории вероятностей» (1846), «О средних величинах» (1867), «О двух теоремах относительно вероятностей» (1867).

Особо важное значение для дальнейшего развития теории вероятностей имели две последние работы. В первой из них им было выведено известное неравенство, носящее теперь его имя:

$$P\{|\xi - M\xi| > e\sqrt{D\xi}\} \leqslant \frac{1}{e^2}, \tag{7}$$

где ξ — некоторая случайная величина; $M\xi$ и $D\xi$ — ее математическое ожидание и дисперсия. С помощью этого неравенства была установлена весьма общая форма закона больших чисел: если $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ — независимые случайные величины, для которых $D\xi_k < C$, то для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(\xi_k - M\xi_k)\right| > \varepsilon\right\} = 0. \tag{8}$$

Последняя работа содержит наметку доказательства центральной предельной теоремы, утверждающей, что распределение величины

$$\sum_{1}^{n} (\xi_k - M\xi_k) \Big/ \sqrt{\sum_{1}^{n} D\xi_k}. \tag{9}$$

где ξ_k — независимые случайные величины, при $n \to \infty$ стремится к нормальному.

Эти работы Чебышева оказали огромное влияние на развитие теории вероятностей в России, а затем и в Советском Союзе, особенно такого важного раздела этой теории, как предельные теоремы.

Идеи Чебышева развивались А. М. Ляпуновым, А. А. Марковым, С. Н. Бернштейном, А. Я. Хинчиным, А. Н. Колмогоровым, Ю. В. Линником, Б. В. Гнеденко и многими другими исследователями и в СССР и во всем мире.

Е. Я. Ремез, А. В. Скороход, В. Т. Гаврилюк