УДК 517.512.2

Про підсумовування інтегралів методом Бернштейна—Рогозинського

Л. В. Ідельс

Розглянемо інтегральне перетворення, яке визначено формулою

$$T_f(y) = \int_0^{\infty} f(t)\, \Psi\,[h(y)\, t]\, dt, \tag{1}$$

де Ψ та h — задані функції, $\int\limits_0^{\infty}$ — означає $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \int\limits_0^{\lambda}$, якщо ця границя існує.

Нехай

$$S(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(t)\, dt \text{ та } T_f^*(\lambda) = \int_0^{\lambda} f(t)\, \Psi\,[h(\lambda)\, t]\, dt.$$

Будемо говорити, що перетворення T_f регулярне, якщо з $\lim_{\lambda\to\infty} S(\lambda) = S$ завжди випливає $\lim_{\lambda\to\infty} T_f^*(\lambda) = S$.

Далі всюди матимемо на увазі, що функція $f(t)$ інтегровна на будь-якому скінченному інтервалі.

Теорема 1. *Нехай на будь-якому скінченному інтервалі $(-a, a)$ функція $\Psi(t)$ має обмежену варіацію, неперервна в точці $t=0$, та $\Psi(0) = 1$, а $|h(\lambda)| \leqslant a/\lambda$ для всіх $\lambda > 0$. Тоді перетворення T_f регулярне.*

Доведення. Розглянемо різницю $Q(\lambda) = T_f^*(\lambda) - S$. Інтегруючи по частинах $T_f^*(\lambda)$, маємо

$$Q(\lambda) = S(\lambda)\,\Psi[h(\lambda)\lambda] - \int_0^\lambda S(t)\,d\{\Psi[h(\lambda)t]\} - S =$$

$$= [S(\lambda) - S]\,\Psi[h(\lambda)\lambda] + \int_0^\lambda [S - S(t)]\,d\{\Psi[h(\lambda)t]\} = I_1(\lambda) + I_2(\lambda).$$

Але $S(\lambda) \to S$ при $\lambda \to \infty$, а $|h(\lambda)\lambda| \leqslant a$ і, таким чином, функція $\Psi[h(\lambda)\lambda]$ обмежена, так що

$$I_1(\lambda) = [S(\lambda) - S]\,\Psi[h(\lambda)\lambda] = o(1) \text{ при } \lambda \to \infty.$$

Візьмемо фіксоване число λ_0 $(0 < \lambda_0 \leqslant \lambda)$ таким, що

$$|S - S(\lambda)| < \eta\,(> 0) \text{ при } \lambda \geqslant \lambda_0,$$

і представимо $I_2(\lambda)$ як суму двох доданків

$$I_2(\lambda) = \int_0^{\lambda_0} [S - S(t)]\,d\{\Psi[h(\lambda)t]\} +$$

$$+ \int_{\lambda_0}^{\lambda} [S - S(t)]\,d\{\Psi[h(\lambda)t]\} = I_{21}(\lambda) + I_{22}(\lambda).$$

Тоді

$$|I_{22}(\lambda)| \leqslant \int_{\lambda_0}^{\lambda} |S - S(t)|\,|d\{\Psi[h(\lambda)t]\}| <$$

$$< \eta \int_{\lambda_0}^{\lambda} |d\{\Psi[h(\lambda)t]\}| = \eta \operatorname*{Var}_{\lambda_0}^{\lambda} \Psi[h(\lambda)t]. \tag{2}$$

де $\operatorname*{Var}_{\alpha}^{\beta} \Psi(t)$ означає повну варіацію функції $\Psi(t)$ на інтервалі $[\alpha, \beta]$.

Але $|h(\lambda)\lambda| \leqslant a$ та $|h(\lambda)\lambda_0| \leqslant \dfrac{a\lambda_0}{\lambda} < a$ і, таким чином, область визначення функції $\Psi[h(\lambda)t]$ для $\lambda_0 \leqslant t \leqslant \lambda$ не виходить за проміжок $(-a, a)$. Тоді з нерівності (2) маємо

$$|I_{22}(\lambda)| < \eta C_1,$$

де C_1 — деяка константа. Розглянемо $I_{21}(\lambda)$. Можна показати, що різниця $|S - S(\lambda)|$ обмежена деякою константою C_2 для всіх $\lambda > 0$ у сукупності, так що

$$|I_{21}(\lambda)| \leqslant C_2 \int_0^{\lambda_0} |d\{\Psi[h(\lambda)t]\}| = C_2 \operatorname*{Var}_{0}^{\lambda_0} \Psi[h(\lambda)t].$$

Через те, що функція $\Psi(t)$ неперервна в точці $t = 0$ та $|h(\lambda)\lambda_0| \leqslant a\lambda_0/\lambda$, то для будь-якого фіксованого λ_0

$$\mathop{\mathrm{Var}}_{0}^{\lambda_0} \Psi[h(\lambda)t] = o(1) \quad \text{при } \lambda \to \infty.$$

Тобто, $I_{21}(\lambda) = o(1)$. Із здобутих оцінок та співвідношень одержимо твердження теореми.

Інтеграл Фур'є функції $f(t)$ визначається як

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(t-x)\,dt. \tag{3}$$

Нехай

$$S_\lambda(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda du \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(t-x)\,dt,$$

де $S_\lambda(x)$ «частинна сума» інтеграла (3). Розглянемо вираз

$$B_\lambda^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\{S_\lambda[x+h(\lambda)] + S_\lambda[x-h(\lambda)]\}, \tag{4}$$

де $h(\lambda) = O\left\{\frac{1}{\lambda}\right\}$.

Вважатимемо, (див. [1]), що інтеграл Фур'є підсумовується методом $(BR, h(\lambda), 1)$ до деякої функції $P(x)$, якщо існує границя

$$\lim_{\lambda\to\infty} B_\lambda^{(1)}(x) = P(x).$$

Після нескладних обчислень дістанемо

$$B_\lambda^{(1)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \cos h(\lambda)u\,du \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(t-x)\,dt.$$

Продовжуючи процес підсумовування, визначений формулою (4) для будь-якого цілого $m > 0$, маємо

$$B_\lambda^{(m)}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \cos^m h(\lambda)u\,du \int_{-\infty}^\infty f(t)\cos u(t-x)\,dt, \tag{5}$$

де

$$B_\lambda^{(m)}(x) = \frac{1}{2}\{B_\lambda^{(m-1)}[x+h(\lambda)] + B_\lambda^{(m-1)}[x-h(\lambda)]\}.$$

Формула (5) дозволяє перенести дане вище означення на довільні підсумовні інтеграли. Вважатимемо, що інтеграл $\int_0^\infty f(t)\,dt$ підсумовується методами $(BR, h(\lambda), m)$ (m — ціле) до числа S, якщо існує границя

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^\lambda f(t)\cos^m h(\lambda)t\,dt = S.$$

Це означення дає нам так званий метод Бернштейна — Рогозинського підсумовування розбіжних інтегралів. Як метод підсумовування рядів Фур'є він був розглянутий в [1—3].

Методи $(BR, h(\lambda), m)$ належать до класу інтегральних перетворень, визначенних формулою (1). Функція $\cos^m t\,(m > 0)$ задовольняє всі ті умови теореми 1, які задовольняє функція $\Psi(t)$. Встановлено таку теорему.

Теорема 2. *Метод* $(BR, h(\lambda), m)$ *регулярний.*

Співвідношення між методами (C, α) $(\alpha > 0)$ та методами $(BR, h(\lambda), m)$ виявляє наступна теорема.

Теорема 3. *Метод* $\left(BR, \frac{p\pi}{2\lambda}, m\right)$ *(p — ціле непарне)* $(m > 0)$, *не слабіший за метод* (C, α) $(\alpha > 0)$, *де m — найближче ціле, більше за α.*

Доведення. Необхідно показати, що якщо $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_0^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^\alpha f(t)dt = S$, то $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_0^\lambda f(t)\cos^m h(\lambda)\,t dt = S$.

Нехай

$$T^{(m)}(\lambda) = \int\limits_0^\lambda f(t)\cos^m h(\lambda)\,t dt.$$

Розглянемо різницю $Q^{(m)}(\lambda) = T^{(m)}(\lambda) - S$. Інтегруючи $T^{(m)}(\lambda)$ $(m+1)$ разів по частинах, одержимо

$$T^{(m)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k S_k(\lambda)\{\cos^m h(\lambda)\,\lambda\}^{(k)} +$$
$$+ (-1)^{m+1}\int\limits_0^\lambda S_m(t)\, d^{(m+1)}\{\cos^m h(\lambda)\,t\}, \tag{6}$$

де

$$S_0(t) = S(t) = \int\limits_0^t f(z)\,dz,\ \ S_k(t) = \int\limits_0^t S_{k-1}(z)\,dz,$$

$\{\cos^m h(\lambda)\,\lambda\}^{(k)}$ означає k-ту похідну функції $\cos^m h(\lambda)\,t$ в точці $t = \lambda$. Позначимо

$$\Delta_m(\lambda) = \int\limits_0^\lambda \left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^m f(t)\,dt = \frac{m!}{\lambda^m} S_m(\lambda).$$

Звідси $S_m(\lambda) = A_m(\lambda)\,\Delta_m(\lambda)$, де $A_m(\lambda) = \frac{\lambda^m}{m!}$. Тоді зобразимо (6) у вигляді

$$T^{(m)}(\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k S_k(\lambda)\{\cos^m h(\lambda)\,\lambda\}^{(k)} + (-1)^m A_m(\lambda)\,\Delta_m(\lambda)\times$$
$$\times\{\cos^m h(\lambda)\,\lambda\}^{(m)} + (-1)^{m+1}\int\limits_0^\lambda A_m(t)\,\Delta_m(t)\,d^{(m+1)}\{\cos^m h(\lambda)\,t\}.$$

Для $Q^{(m)}(\lambda)$ після нескладних перетворень та обчислень дістанемо

$$Q^m(\lambda) = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k S_k(\lambda)\{\cos^m h(\lambda)\,\lambda\}^{(k)} + (-1)^m A_m(\lambda)\,[\Delta_m(\lambda) - S]\times$$
$$\times\{\cos^m h(\lambda)\,\lambda\}^{(m)} + (-1)^m\int\limits_0 [S - \Delta_m(t)]\,A_m(t)\,d^{(m+1)}\{\cos^m h(\lambda)\,t\} -$$

$$-S\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}A_{m-k}(\lambda)\{\cos^m h(\lambda)\lambda\}^{(m-k)}=I_1(\lambda)+I_2(\lambda)+I_3(\lambda)-I_4(\lambda).$$

Але $\cos h(\lambda)\lambda=0$, так що $\{\cos^m h(\lambda)\lambda\}^{(k)}=0$ $(k=0,1,2,\ldots,m-1)$. Тобто $I_1(\lambda)=0$, $I_4(\lambda)=0$. Але за теоремою включення для C-методу інтеграл $\int\limits_0^\infty f(t)\,dt$ підсумовується методом (C, m) або $\Delta_m(\lambda)-S=o(1)$ при $\lambda\to\infty$. Тоді, оскільки

$$A_m(\lambda)=O(\lambda^m)$$

і, через те що $h(\lambda)=O\left\{\frac{1}{\lambda}\right\}$,

$$|\{\cos^m h(\lambda)\lambda\}^{(k)}|=O\left\{\frac{1}{\lambda^k}\right\}\ (k=1,2,\ldots,m),$$

для $I_2(\lambda)$ маємо:

$$|I_2(\lambda)|=O(\lambda^m)\,o(1)\,O\left\{\frac{1}{\lambda^m}\right\}=o(1)\ \text{при}\ \lambda\to\infty.$$

Оцінимо тепер $I_3(\lambda)$. Візьмемо фіксоване число $\lambda_1>0$ так, щоб для всіх m $|\Delta_m(\lambda)-S|<\varepsilon\,(>0)$ для $\lambda\geqslant\lambda_1>0$ та зобразимо $I_3(\lambda)$ як суму двох доданків

$$I_3(\lambda)=(-1)^m\int\limits_0^{\lambda_1}[S-\Delta_m(t)]\,A_m(t)\,d^{(m+1)}\{\cos^m h(\lambda)t\}+(-1)^m\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda}[S-$$

$$-\Delta_m(t)]\,A_m(t)\,d^{(m+1)}\{\cos^m h(\lambda)t\}=I_{31}(\lambda)+I_{32}(\lambda).$$

Але, через вибір λ_1, маємо

$$|I_{32}(\lambda)|\leqslant\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda}|S-\Delta_m(t)|\,|A_m(t)|\,|d^{(m+1)}\{\cos^m h(\lambda)t\}|<$$

$$<\varepsilon\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda}O(t^m)\,O\left(\frac{1}{\lambda^m}\right)dt<\varepsilon\ \text{для}\ \lambda\geqslant\lambda_1.$$

З іншого боку, для всіх λ у сукупності різниця $|S-\Delta_m(\lambda)|$ обмежена деякою сталою C_3. Тоді для фіксованого λ_1

$$|I_{31}(\lambda)|<C_3\int\limits_0^{\lambda_1}|A_m(t)|\,|d^{(m+1)}\{\cos^m h(\lambda)t\}|=$$

$$=C_3\int\limits_0^{\lambda_1}O(t^m)\,O\left(\frac{1}{\lambda^{m+1}}\right)dt=O\left\{\frac{1}{\lambda^{m+1}}\right\}.$$

Це завершує доведення теореми.

Використовуючи теорему 3, доведемо таку:

Теорема 4. *Метод підсумовування* $\left(BR, \frac{p\pi}{2\lambda}, m+1\right)$ (p — *ціле непарне*), *сильніший за метод* $(C, \alpha)\,(\alpha>0)$, *де* m — *найменше ціле, більше за* α.

При доведенні цієї теореми використовуємо той факт (див., [3]), що інтегральний метод Гельдера та метод (C, α) еквівалентні. В цілому доведення проводиться за тою ж схемою, що і доведення аналогічної теореми для довільних числових рядів [2].

Відзначимо, що теореми, аналогічні теоремам 3 та 4, були встановлені для довільних числових рядів, при $h(\lambda)=\frac{\pi}{2\lambda+1}$ [2] і які, як випливає з доведення цих теорем, справедливі для $h(\lambda)=\frac{p\pi}{2\lambda}$ (p — ціле непарне). Нічого подібного ми не можемо стверджувати для підсумовних інтегралів. З теорії розбіжних рядів відома так звана «лімітуюча теорема»: якщо ряд $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ підсумовується методом (C, k), то $S_n = o(n^k)$, де $S'_n=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Для інтегралів така теорема відсутня (це як раз той пункт, де аналог між рядами та інтегралами порушується). Тому цікава така теорема.

Теорема 5. *Нехай $f(t)$ належить до $L(-\infty, \infty)$. Тоді інтеграл Фур'є* (3) *підсумовується методом* $(BR, \frac{\pi}{2\lambda+1}, 1)$ *до функції $f(x)$ в кожній точці, де*

$$\int_0^\theta |f(x+t)+f(x-t)-2f(x)|\,dt = o(\theta),$$

тобто майже скрізь.

Доведення. Як випливає з означення методу $(BR, h(\lambda), 1)$, необхідно показати, що

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \cos h(\lambda)\,u\,du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt = f(x).$$

Маємо далі

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \cos h(\lambda)\,u\,du\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(t-x)\,dt - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\lambda \cos h(\lambda)\,u\,du\int_0^{\infty}\{f(x+t)+$$

$$+f(x-t)\}\cos ut\,dt - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Phi_x(t)\,dt\int_0^\lambda \cos h(\lambda)\,u\cdot\cos ut\,du, \tag{7}$$

де $\Phi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$.

Нехай

$$K(t, \lambda)=\int_0^\lambda \cos ut\cdot\cos h(\lambda)\,u\,du = \lambda\int_0^1 \cos\lambda tv\cos h(\lambda)\,\lambda v\,dv =$$

$$\frac{\cos h(\lambda)\,\lambda\sin\lambda t}{t}+\frac{\lambda h(\lambda)}{t}\int_0^1 \sin h(\lambda)\,\lambda v\sin\lambda t v\,dv = P_1(t, \lambda)+P_2(t, \lambda). \tag{8}$$

Візьмемо фіксоване $\delta\ (0<\frac{\pi}{\lambda}<\delta)$ та зобразимо інтеграл справа в (7) у вигляді

$$\int_0^\infty \Phi_x(t)\,K(t, \lambda)\,dt = \left(\int_0^{\frac{\pi}{\lambda}}+\int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta}+\int_\delta^\infty\right)\Phi_x(t)\,K(t, \lambda)\,dt.$$

Тоді, виходячи з (8), маємо

$$\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{\lambda}} + \int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta} + \int\limits_{\delta}^{\infty}\right)\Phi_x(t)\,K(t,\ \lambda)\,dt = \int\limits_0^{\frac{\pi}{\lambda}}\Phi_x(t)\,K(t,\ \lambda)\,dt + \int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta}\Phi_x(t)\,P_1(t,\ \lambda)\,dt +$$

$$+ \int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta}\Phi_x(t)\,P_2(t,\ \lambda)\,dt + \int\limits_{\delta}^{\infty}\Phi_x(t)\,P_1(t,\ \lambda)\,dt + \int\limits_{\delta}^{\infty}\Phi_x(t)\,P_2(t,\ \lambda)\,dt = I_1(\lambda) + I_2(\lambda) +$$

$$+ I_3(\lambda) + I_4(\lambda) + I_5(\lambda).$$

Через те що

$$\cos h(\lambda)\,\lambda = \cos\frac{\pi\lambda}{2\lambda+1} = \sin\frac{\pi}{2(2\lambda+1)} = O\left\{\frac{1}{\lambda}\right\},$$

маємо

$$|I_4(\lambda)| = |\cos h(\lambda)\,\lambda\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{\Phi_x(t)}{t}\sin\lambda t\,dt| \leqslant O\left\{\frac{1}{\lambda}\right\}\int\limits_{\delta}^{\infty}\left|\frac{\Phi_x(t)}{t}\right|dt = O\left\{\frac{1}{\lambda}\right\}.$$

З іншого боку, за другою теоремою про середнє,

$$|P_2(t,\ \lambda)| = \left|\frac{\pi\lambda}{(2\lambda+1)\,t}\int\limits_0^1\sin\frac{\pi\lambda v}{2\lambda+1}\sin\lambda t v\,dv\right| = \left|\frac{\pi\lambda}{(2\lambda+1)\,t}\int\limits_{\xi}^{1}\sin\lambda t v\,dv\right| =$$

$$= O\left\{\frac{1}{\lambda t^2}\right\},\quad |t| > \frac{\pi}{\lambda},\ \xi\in(0,\ 1), \tag{9}$$

де C_4 деяка стала. Тоді

$$|I_5(\lambda)| \leqslant \frac{C_4}{\lambda}\int\limits_{\delta}^{\infty}\frac{|\Phi_x(t)|}{t^2}\,dt = O\left\{\frac{1}{\lambda}\right\}.$$

Але для будь-якої L-інтегровної функції $f(t)$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta}\Phi_x(t)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = o(\log\lambda)$$

(див., наприклад, [4]), тобто

$$I_2(\lambda) = \cos h(\lambda)\,\lambda\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta}\Phi_x(t)\,\frac{\sin\lambda t}{t}\,dt = O\left\{\frac{1}{\lambda}\right\}o(\log\lambda) = o(1).$$

Маємо далі, за (9),

$$|I_3(\lambda)| = \left|\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta}\Phi_x(t)\,P_2(t,\ \lambda)\,dt\right| = O\left\{\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta}\frac{|\Phi_x(t)|}{\lambda t^2}\,dt\right\}.$$

Тоді в кожній точці Лебега

$$\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta}\frac{|\Phi_x(t)|}{\lambda t^2}\,dt = \frac{1}{\lambda t^2}\int\limits_0^t|\Phi_x(\theta)|\,d\theta\,\Bigg|_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta} + \frac{2}{\lambda}\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta}\frac{dt}{t^3}\int\limits_0^t|\Phi_x(\theta)|\,d\theta = o(1) +$$

$$+ o\left\{\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\delta}\frac{dt}{t^3}\right\} = o(1),$$

в чому переконуємося, вибираючи спочатку δ, а потім λ. З другої нерівності (8) маємо

$$|K(t, \lambda)| = |\lambda \int_0^1 \cos h(\lambda) \lambda v \cos \lambda t v dv| < C_5 \lambda \quad (C_5 = \mathrm{const})$$

і, таким чином,

$$|I_1(\lambda)| \leqslant C_5 \lambda \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} |\Phi_x(t)| \, dt = C_5 \lambda \, o\left(\frac{\pi}{\lambda}\right) = o(1) \text{ при } \lambda \to \infty.$$

Із здобутих оцінок приходимо до твердження теореми.
Аналогічний результат має місце для

$$h(\lambda) = \frac{p\pi}{2\lambda} + O\left\{\frac{1}{\lambda \log \lambda}\right\} (p \text{ — ціле непарне}).$$

Теорема 6. *Нехай* $f(t) \in L(-\infty, \infty)$. *Тоді спряжений інтеграл Фур'є*

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin u (t - x) \, dt$$

підсумовується методом $\left(BR, \frac{\pi}{2\lambda + 1}, 1\right)$ *до функції* $\widetilde{f}(x)$, *яка визначена формулою*

$$\widetilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \, dt = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \, dt$$

в кожній точці, де

$$\int_0^\theta |f(x+t) - f(x-t)| \, dt = o(\theta).$$

Доведення. Нам необхідно показати, що

$$\lim_{\lambda \to \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \cos h(\lambda) u du \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin u (t - x) \, dt = \widetilde{f}(x).$$

Візьмемо функцію

$$\widetilde{f}_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^\infty \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} \, dt$$

та розглянемо різницю

$$\widetilde{Q}_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \cos h(\lambda) u du \int_{-\infty}^\infty f(t) \sin u (t - x) \, dt - \widetilde{f}_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \{f(x+t) -$$

$$- f(x-t)\} \widetilde{K}(t, \lambda) \, dt - \widetilde{f}_\lambda(x), \tag{10}$$

де

$$\widetilde{K}(t, \lambda) = \int_0^{\lambda} \cos h(\lambda) u \sin ut du.$$

Зобразимо $\widetilde{K}(t, \lambda)$ у вигляді

$$\widetilde{K}(t, \lambda) = \lambda \int_0^1 \cos h(\lambda) \lambda v \sin \lambda tv dv = \frac{\cos h(\lambda) \lambda \cos \lambda t}{t} + \frac{1}{t} -$$

$$- \frac{h(\lambda)\lambda}{t} \int_0^1 \sin h(\lambda) \lambda v \cos \lambda tv dv = \frac{1}{t} - \widetilde{P}_1(t, \lambda) - \widetilde{P}_2(t, \lambda). \quad (11)$$

За (11), зобразимо $\widetilde{Q}_\lambda(x)$ у вигляді

$$\widetilde{Q}_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \{f(x+t) - f(x-t)\} \widetilde{K}(t, \lambda) dt - \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{\lambda}} \{f(x+t) - f(x-t)\} \widetilde{K}(t, \lambda) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} \{f(x+t) - f(x-t)\} \widetilde{P}_1(t, \lambda) dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{\lambda}}^{\infty} \{f(x+t) - f(x-t)\} \widetilde{P}_2(t, \lambda) dt.$$

Але з першої рівності (11), випливає

$$\widetilde{K}(t, \lambda) = O(\lambda). \quad (12)$$

Для $P_2(t, \lambda)$ так, як і при доведенні нерівності (9), одержимо

$$\widetilde{P}_2(t, \lambda) = O\left\{\frac{1}{\lambda t^2}\right\}, \quad |t| > \frac{\pi}{\lambda}. \quad (13)$$

Тепер, повторюючи схему доведення теореми 5, через оцінки (12) та (13), легко переконатися, що $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \widetilde{Q}_\lambda(x) = 0$.

Завершує доведення той факт, що для будь-якої $f(t) \in L(-\infty, \infty)$ $\widetilde{f}_\lambda(x) \to \widetilde{f}(x)$ при $\lambda \to \infty$ майже скрізь (див. [4]).

ЛІТЕРАТУРА

1. Ф. И. Харшиладзе. О методе суммирования С. Н. Бернштейна, Матем. сб., вып. 11, 1942.
2. И. И. Огиевецкий, О методе суммирования С. Н. Бернштейна, ДАН СССР, т. 76, 1951, 635—638.
3. Г. Х. Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, М., 1951.
4. А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. 1, 2, «Мир», М., 1965.

Надійшла 18.V 1971 р.,
після переробки — 1.XI 1971 р.

Новосибірський інститут інженерів залізничного транспорту