УДК 519.21

Про один метод доведення граничних теорем для деяких функціоналів від напівмарковських процесів

В. С. Королюк, А. Ф. Турбін

В теорії ланцюгів Маркова і напівмарковських процесів багато характеристик досліджуваних процесів задовольняють рівняння виду

$$(I - P - Q(z)) f_{\xi}(z) = q(z),$$

де P — матриця ймовірностей переходу вкладеного ланцюга Маркова, матриці $Q(z)$ і вектори $q(z)$ визначаються умовами задачі, $f_{\xi}(z)$ — шукана характеристика досліджуваного процесу $\xi(t)$.

В цій статті автори пропонують метод доведення граничних теорем виду

$$\lim_{z \to 0} v(z) f_{\xi}(z) = \overline{f_{\xi}}(0), \tag{1}$$

де $v(z)$ — деяка нормуюча функція.

Ідея методу полягає в тому, що при цілком природних обмеженнях на вихідний процес можна виділити основну частину оператора

$$(I - P - Q(z))^{-1} = P(z) + o(\| P(z) \|). \tag{2}$$

Для простоти досліджень надалі обмежимось лише напівмарковськими процесами деякого класу.

1. Нехай $\xi(t)$ — напівмарковський процес, визначений на фазовому просторі $E = \{0, 1, 2, \ldots\}$ з допомогою матриці ймовірностей переходу P ланцюга Маркова $\{\eta(n),\ n \geqslant 1\}$, укладеного в процес $\xi(t)$ і матрицею $\{R_{ij}(t),$ $i, j \in E\}$ функцій розподілу випадкових величин ξ_{ij} — часів перебування в i-му стані [1, 2].

Через H позначимо простір функцій, визначених на E, з нормою: $h \in H$, $\| h \| = \sup_{i \in E} | h_i |$. Нехай H^* — простір, спряжений до H.

Визначимо норму операторів, які діють із H в H, таким чином: $\| A \| = \sup_{i \in E} \sum_{j \in E} (a_{ij})$ і нехай $[H \to H]$ — простір обмежених в цій нормі лінійних операторів.

Вважатимемо, що функціонал $f_{\xi}(z)$ від $\xi(t)$ є $\mathfrak{Q}$-функціоналом, якщо знайдуться $Q(z) \in [H \to H]$, $q(z) \in H$, які однозначно визначаються процесом $\xi(t)$, такі, що

$$(I - P - Q(z)) f_{\xi}(z) = q(z). \tag{3}$$

Тут z — деякий малий параметр.

Припустимо, що процес $\xi(t)$ такий, що A_1: фазовий простір E можна зобразити у вигляді $E = E_+ \cup E_-$, де E_+ — замкнутий клас ергодичних станів, E_- — множина незворотних станів. Нехай $\varrho \in H^*$ — стаціонарний розподіл ланцюга $\{\eta(n),\ n \geqslant 1\}$, тобто $\varrho H = \varrho$, $(\varrho, u) = 1$, $Pu = u$;

$A_2: Q(z) = zQ + S(z)$, де Q, $S(z) \in [H \to H]$, причому

$$| z |^{-1} \| S(z) \| \underset{z \to 0}{\to} 0; \tag{4}$$

A_3: $\pi = (\varrho, Qu) \neq 0$.

Лема 1. *Якщо мають місце умови A_1—A_3, то знайдеться $\delta_0 > 0$ таке, що $(I - P - zQ)^{-1}$ існує і обмежений для $0 < |z| < \delta_0$.*

Доведення. Нехай h — довільний вектор з H.
Розглянемо рівняння

$$(I - P - zQ)\, x(z) = h. \tag{5}$$

На підставі A_1 існує $\lim\limits_{n\to\infty} P^n = P^\infty$, причому $P^\infty h = (\varrho, h) u$. Додамо до обох частин (5) вектор $P^\infty x(z) = (\varrho, x(z)) u$.

$$(I - P + P^\infty - zQ)\, x(z) = h + (\varrho, x(z))\, u. \tag{6}$$

Відомо (див. [3]), що $G = (I - P + P^\infty)^{-1}$ існує і обмежений. Тому, виносячи в (6) G^{-1}, можна одержати

$$(I - zGQ)\, x(z) = Gh + (\varrho, x(z))\, u. \tag{7}$$

Тут ми використали властивість оператора G: $Gu = u$, $\varrho G = \varrho$.

Нехай $0 < |z| < \|GQ\|^{-1}$ (умова A_2). Тоді оператор $(I - zGQ)^{-1}$ існує, обмежений і, отже,

$$x(z) = (I - zGQ)^{-1} Gh + (\varrho, x(z))\, (I - zGQ)^{-1} u. \tag{8}$$

Насамперед зазначимо, що

$$(\varrho, (I - zGQ)^{-1} u) = (\varrho, [I - zGQ + z^2 (GQ)^2 (I - zGQ)^{-1}]\, u) = 1 + z(\varrho, GQu) + \\ + z^2 (\varrho, (GQ)^2 (I - zGQ)^{-1} u).$$

Але $(\varrho, GQu) = (\varrho G, Qu) = (\varrho, Qu) = \pi$. Тому, припускаючи $\varphi(z) = (\varrho, x(z))$, одержимо, використовуючи (8):

$$-(\varrho, (I - zGQ)^{-1} Gh) = z\varphi(z)\, [\pi + z(\varrho, (GQ)^2 (I - zGQ)^{-1} u)].$$

Тому що на підставі A_3 $\pi \neq 0$, то знайдеться $\delta_1 > 0$ таке, що $\pi + z(\varrho, (GQ)^2 (I - zGQ)^{-1} u) \neq 0$ для $0 < |z| < \delta_1$.

Припускаючи $\delta_0 = \min(\delta_1, \|GQ\|^{-1})$, одержуємо твердження леми 1.

Надалі нам знадобиться такий результат (див. [3]).

Лема 2. *Якщо* $\pi \neq 0$, *то для* $0 < |z| < \|S_0 Q\|^{-1}$ *має місце розклад*

$$(I - P - zQ)^{-1} = -\frac{1}{z\pi} P^\infty + S_0 (I - zQS_0)^{-1} = -\frac{1}{z\pi} P^\infty + (I - zS_0 Q)^{-1} S_0, \tag{9}$$

де

$$S_0 = (I - \pi^{-1} P^\infty Q)\, R_0\, (I - \pi^{-1} Q P^\infty) \in [H \to H],\quad R_0 = (I - P + P^\infty)^{-1} - P^\infty.$$

Використовуючи леми 1 і 2, доведемо такий результат.

Лема 3. *Якщо виконуються умови* $A_1 - A_3$, *то знайдеться* $\delta > 0$ *таке, що* $(I - P - zQ - S(z))^{-1}$ *існує і обмежений для* $0 < |z| < \delta$.

Доведення. На підставі леми 1 для $0 < |z| < \delta_0$

$$I - P - zQ - S(z) = (I - P - zQ)\, [I - (I - P - zQ)^{-1} S(z)].$$

Використовуючи лему 2, одержимо

$$\|(I - P - zQ)^{-1} S(z)\| = \left\| -\frac{1}{z\pi} P^\infty S(z) + S_0 (I - zQS_0)^{-1} S(z) \right\| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{|\pi|} |z|^{-1} \|S(z)\| + \|S_0 (I - zQS_0)^{-1}\| \cdot \|S(z)\|.$$

В одержаній оцінці вираз справа прямує до нуля, значить, знайдеться $\delta_1 > 0$ таке, що воно менше одиниці для $0 < |z| < \delta_1$.

Твердження леми 3 виконується для $\delta = \min(\delta_0, \delta_1)$.

Основний результат цієї статті формулюється в наведених нижче двох теоремах і їх наслідках.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* $A_1 - A_3$, *то*

$$\lim_{z\to 0} z\, (I - P - zQ - S(z))^{-1} = -\frac{1}{\pi} P^\infty. \tag{10}$$

Доведення. Виберемо $\delta > 0$ таке, щоб усі оператори, які розглядаються нижче, існували і були обмежені.

Маємо

$$z(I - P - zQ - S(z))^{-1} + \frac{1}{\pi} P^{\infty} = z[(I - P - zQ - S(z))^{-1} - (I - P - zQ)^{-1}] +$$

$$+ z[(I - P - zQ)^{-1} + \frac{1}{\pi} P^{\infty}]. \tag{11}$$

Кожний доданок правої частини (11) оцінимо окремо. Насамперед

$$(I - P - zQ - S(z))^{-1} - (I - P - zQ)^{-1} = (I - P - zQ)^{-1} [(I - S(z) \times$$

$$\times (I - P - zQ)^{-1})^{-1} - I] = (I - P - zQ)^{-1} T(z) (I - T(z))^{-1},$$

де $T(z) = S(z)(I - P - zQ)^{-1}$. Тому на підставі умови A_2

$$\| z[(I - P - zQ - S(z))^{-1} - (I - P - zQ)^{-1}] \| \leqslant |z| \, \| (I - P - zQ)^{-1} \| \times$$

$$\times \| T(z) \| \cdot \| (I - T(z))^{-1} \| \leqslant \frac{2}{|\pi|} \| T(z) \| \cdot \| (I - T(z))^{-1} \| \to 0 \text{ при } z \to 0.$$

Оцінюючи другий доданок в (11) за допомогою леми 2, одержимо

$$\| z(I - P - zQ)^{-1} + \frac{1}{\pi} P^{\infty} \| = |z| \, \| S_0 (I - zQS_0)^{-1} \| \to 0 \text{ при } z \to 0.$$

Теорему доведено.

Розглянемо $\mathfrak{Q}$ — функціонал процесу $\xi(t)$, визначеного умовами A_1 — A_3 і нехай $q(z)$ в (3) має вигляд $q_0 + q_1(z)$, де $\| q_1(z) \| \underset{z \to 0}{\to} 0$. З доведеної теореми негайно випливає такий наслідок.

Наслідок 1.

$$\lim_{z \to 0} z f_{\xi}(z) = - \frac{(\varrho, q_0)}{\pi} u. \tag{12}$$

В застосуваннях $Q(z)$ іноді має дещо інший вигляд:

$$Q(z) = Q_0(z) + Q_1(z) \in [H \to H],$$

де $Q_0(z)$ дорівнює, наприклад, $z^{\alpha} L(z)$, де $0 < \alpha \leqslant 1$, а елементи матриці $L(z)$ — функції, що повільно змінюються [4].

Проте можна довести аналог теореми 1 і в цьому випадку.

Нехай виконуються такі умови:

$A_4 : Q(z) = Q_0(z) + Q_1(z)$, причому

$$\| Q_0(z) \| \underset{z \to 0}{\to} 0, \tag{13}$$

$$\frac{\| Q_1(z) \|}{\| Q_0(z) \|} \underset{z \to 0}{\to} 0; \tag{14}$$

$$A_5 : \pi_0(z) = (\varrho, Q_0(z) u) \neq 0 \tag{15}$$

для досить малих $|z|$, відмінних від нуля.

Теорема 2. *Якщо виконуються умови A_1, A_4, A_5, то*

$$\lim_{z \to 0} \pi_0(z) (I - P - Q_0(z) - Q_1(z))^{-1} = - P^{\infty}. \tag{16}$$

Доведення. Розглянемо оператор

$$W(t, z) = I - P - tQ_0(z) - t^2 Q_1(z).$$

Так само, як і в лемі 3, можна довести існування і обмеженість оператора $W^{-1}(t, z)$ для $0 < t < \delta(z)$ з деякими $\delta(z) > 0$, причому, на підставі A_4, z можна вибрати так, щоб $\delta(z) > 1$.

Для $W(t, z)$ маємо в розумінні норми простору $[H \to H]$

$$\lim_{t\to 1} W(t, z) = I - P - Q_0(z) - Q_1(z), \ \lim_{t\to 1} W^{-1}(t, z) = (I - P - Q_0(z) - Q_1(z))^{-1} \tag{17}$$

(див., наприклад, [5]).

Скориставшись теоремою 2 [3], запишемо

$$W^{-1}(t, z) = -\frac{1}{t\pi_0(z)} P^{\infty} + T(t, z), \tag{18}$$

де $T(t, z)$ обмежений для $0 < t < \delta(z)$ і досить малих z, включаючи $z=0$. З (17) і (18) одержуємо

$$\lim_{z\to 0} \pi(z)(I - P - Q_0(z) - Q_1(z))^{-1} = \lim_{z\to 0} \lim_{t\to 1} \pi(z) W^{-1}(t, z) =$$

$$= \lim_{z\to 0} \pi(z)\left[-\frac{1}{\pi(z)} P^{\infty} + T(t, z)\right] = -P^{\infty} + \lim_{z\to 0} \pi(z) T(1, z) = -P^{\infty},$$

що й доводить теорему.

Наслідок 2. *Якщо виконуються умови теореми 2, то для $f_{\xi}(z)$ має місце*

$$\lim_{z\to 0} \pi(z) f_{\xi}(z) = -(\varrho, q_0) u. \tag{19}$$

Проілюструємо застосування одержаних результатів на конкретних прикладах.

Приклад 1. Нехай $\xi(t)$ — ПМП на E, причому $E = E_+$. Покладемо

$$a_{ij} = \int_0^{\infty} t dR_{ij}(t), \quad a_i = \sum_{i\in E} a_{ij} p_{ij} < \infty,$$

$$a = [a_0, a_1, \ldots],$$

$$F_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j / \xi(0) = i\},$$

$$\varphi_{ij}(z) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF_{ij}(t),$$

$$\pi_{ij}(z) = p_{ij} \int_0^{\infty} e^{-st} dR_{ij}(t),$$

$$d_i(z) = 1 - \sum_{i\in E} \pi_{ij}(z).$$

Відомо (див. [6,7]) що

$$\Phi(z) = D(z) + \Pi(z)\Phi(z),$$

де

$$\Phi(z) = \{\varphi_{ij}(z), i, j \in E\}, \quad \Pi(z) = \{\pi_{ij}(z), i, j \in E\}, \quad D(z) = \{\delta_{ij} d_i(z), i, j \in E\}.$$

Припустимо, що $I - \Pi(z) = I - P + zA - S(z)$, де

$$A = \{a_{ij} p_{ij}, i, j \in E\} \in [H \to H], \tag{20}$$

$$S(z) \in [H \to H], \ |z|^{-1} \| S(z) \| \underset{z\to 0}{\to} 0. \tag{21}$$

Якщо виконуються умови (20), (21) (в даному випадку $\pi = (\rho, Au) = \sum_{i\in E}\rho_i a_i > 0$), то за лемою 3,

$$\Phi(z) = (I - \Pi(z))^{-1}D(z) = (I - P + zA - S(z))^{-1}D(z), \tag{22}$$

де $$D(z) = zD_0 + D_1(z), \quad D_0 = \{\delta_{ij}a_i, i, j \in E\}, \ \| z^{-1}D_1(z) \| \underset{z\to 0}{\to} 0.$$

Застосовуючи теорему 1, одержуємо

$$\lim_{z\to 0}\Phi(z) = \lim_{z\to 0}(I - P + zA - S(z))^{-1}(zD_0 + D_1(z)) = \lim_{z\to 0} z(I - P +$$

$$+ zA - S(z))^{-1}D_0 + \lim_{z\to 0} z(I - P + zA - S(z))^{-1}D_1(z) = \frac{1}{\pi}P^{\infty}D_0 =$$

$$= \frac{1}{\sum_{i\in E}\rho_i a_i}\begin{pmatrix} \rho_0 a_0 & \rho_1 a_1 & \rho_2 a_2 & \cdots \\ \rho_0 a_0 & \rho_1 a_1 & \rho_2 a_2 & \cdots \\ \rho_0 a_0 & \rho_1 a_1 & \rho_2 a_2 & \cdots \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Це — відомий результат (див. [6]).

Приклад 2. Знайдемо граничний розподіл для часу перебування ПМП $\xi_\varepsilon(t)$, визначеного умовами (див. [8]);

B_1: нульовий стан є поглинаючим, тобто,

$$P^{\varepsilon}_{0j}(t) \equiv 0, \quad j \in E_0 = \{1, 2, \ldots\}.$$

Ймовірності переходу залежать від малого параметра ε таким чином:

$$P^{\varepsilon}_{ij}(t) = p^{\varepsilon}_{ij}R_{ij}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right),$$

$$p^{\varepsilon}_{ij} = \begin{cases} p_{ij} + \varepsilon q_{ij}, & i, j \in E, \\ \varepsilon q_{i0}, & i \in E_0, \end{cases}$$

причому $\sum_{i\in E_0} q_{i0} > 0$.

B_2: $E_0 = E_+$, ρ — стаціонарний розподіл укладеного ланцюга Маркова з матрицею ймовірностей переходу $P = \{p_{ij}, \ i, j \in E\}$. Нехай τ^{ε}_i — час перебування $\xi_\varepsilon(t)$ в E_0, починаючи з i-го стану, $i \in E_0$ і

$$\varphi^{\varepsilon}_i(z) = M\exp\{-\tau^{\varepsilon}_i z\}.$$

Для визначення $\varphi^{\varepsilon}(z) = (\varphi^{\varepsilon}_i(z), i \in E_0)$ можна одержати рівняння [8, 9]:

$$(I - P - \varepsilon(Q - zA) - S(\varepsilon, z))\varphi^{\varepsilon}(z) = \varepsilon q_0 + q_1(\varepsilon, z), \tag{24}$$

де $Q = \{q_{ij}, \ i, j \in E_0\}$, $A = \{a_{ij}p_{ij}, \ i, j \in E_0\}$, $q_0 = (q_{i0}, \ i \in E_0)$.

Припустимо, що $\xi_\varepsilon(t)$ такий, що

$$Q, A, S(\varepsilon, z) \in [H \to H] \tag{25}$$

для $0 < \varepsilon < \delta(z)$.

$$\varepsilon^{-1}\| S(\varepsilon, z) \| \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0, \quad \varepsilon^{-1}\| q_1(\varepsilon, z) \| \underset{\varepsilon\to 0}{\to} 0 \tag{26}$$

для довільного скінченного z.

Крім цього зазначимо, що в умовах, які розглядаються,

$$\pi(z) = (\rho, (Q - zA)u) \neq 0.$$

Застосуємо леми 2 і 3:

$$\varphi^{\varepsilon}(z) = (I - P - \varepsilon(Q - zA) - S(\varepsilon, z))^{-1}(\varepsilon q_0 + q_1(\varepsilon, z))$$

для $0 < \varepsilon < \delta(z)$.

Нарешті, з теореми 1 маємо:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\varphi^{\varepsilon}(z) = \lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon(I - P - \varepsilon(Q - zA) - S(\varepsilon, z))^{-1} q_0 +$$

$$+ \lim_{\varepsilon\to0}\varepsilon(I - P - \varepsilon(Q - zA) - S(\varepsilon, z)^{-1}\varepsilon^{-1} q_1(\varepsilon, z) =$$

$$= \frac{1}{\sum\limits_{i\in E_0}\rho_i q_{i0} + z\sum\limits_{i\in E_0}\rho_i a_i} P^{\infty} q_0 = \frac{\lambda}{\lambda + z} u,$$

де

$$\lambda = \frac{\sum\limits_{i\in E_0}\rho_i q_{i0}}{\sum\limits_{i\in E_0}\rho_i a_i}.$$

ЛІТЕРАТУРА

1. R. Pyke, Markov renewal processes: definitions and preliminaly properties, Ann, Math. Stat., vol. 32, 4, 1961.
2. И. И. Ежов, В. С. Королюк, Полумарковские процессы и их применение, Кибернетика, № 5, 1967.
3. А. Ф. Турбин, Применение теории возмущения линейных операторов к решению некоторых задач, связанных с цепями Маркова и полумарковскими процессами. Теория вероятностей и математическая статистика, № 6, 1971.
4. Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко, Введение в теорию массового обслуживания, «Наука», М., 1966.
5. С. Г. Крейн, Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве, «Наука», М., 1967.
6. R. Hovard, System Analysis of Semi-Markov processes, IEE Trans. Milit. Elektron., vol. 18, 2, 1964.
7. W. Feller, On Semi-Markov processes, Proc, Nat. Acad., Sci, USA, vol. 51, 4, 1964.
8. В. С. Королюк, Об асимптотическом поведении времени пребывания полумарковского процесса в подмножестве состояний, УМЖ, т. 21, № 6, 1969.
9. В. С. Королюк, Время пребывания полумарковского процесса в фиксированном подмножестве состояний, УМЖ, т. 17, № 3, 1965.

Надійшла 11.IV 1971 р.

Інститут математики АН УРСР