УДК 517.917

Достатні умови стійкості розв'язків лінійної однорідної системи диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами

Г. П. Лось

Задача стійкості розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами ще не розв'язана [1], а тому кожний новий достатній критерій стійкості являє собою новий крок вперед в розв'язанні цієї важливої задачі.

В цій статті одержано новий достатній критерій стійкості, який може бути застосований до достатньо широкого класу рівнянь.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} P_{ij}(t)\, y_j \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{1}$$

з диференційовними коефіцієнтами $P_{ij}(t)$ на інтервалі $[t_0, +\infty)$. Помноживши кожне з рівнянь відповідно на $\varphi_{ij}\lambda_{ij}$, де $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ — номер функції, на яку множаться рівняння, $j = 1, 2, 3, \ldots, n$ — номер рівняння, яке домножається на цю функцію, $\lambda_{ij} = (-1)^{E\left[\frac{i+j-2}{n}\right]}$ (це позначення буде використовуватись на протязі всієї статті), E — ціла частина числа, і додавши одержані рівняння, будемо мати

$$\sum_{i=1}^{n} y_i' \varphi_{ji} \lambda_{ij} = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_{ji} \lambda_{ij} A_{ji} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{2}$$

$$\lambda_{jk} A_{jk} = \sum_{i=1}^{n} P_{ik} \frac{\varphi_{ji}}{\varphi_{jk}} \lambda_{ij} \quad (k, j = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{3}$$

Припустимо, що функції φ_{ij} підібрані так, що виконуються рівності

$$A_{j1} = A_{j2} = \ldots = A_{jn} \quad (j = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_{ji}' \lambda_{ij} = 0. \tag{5}$$

Із (4) можна знайти відношення

$$\frac{\varphi_{ji}}{\varphi_{j1}} = z_{ji1}. \tag{6}$$

Враховуючи рівності (4) і (5), із формул (2) одержимо

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_{ji} \lambda_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} y_i \varphi_{ji} \lambda_{ij} A_{j1}. \tag{7}$$

Звідси знаходимо n перших формальних інтегралів системи рівнянь (1):

$$\sum_{i=1}^{n} y_i z_{ji1} \lambda_{ij} = \frac{C_j}{\varphi_{j1}} \exp \int A_{j1}\, dt, \tag{8}$$

де $z_{ji1} = 1$, якщо $i = 1$.

Якщо $\Delta = \det \| z_{j i 1} \lambda_{ij} \|_1^n \neq 0$, то із (3) маємо

$$y_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{9}$$

де Δ_i одержуються заміною відповідно i-го стовпчика правими частинами рівності (8). Покладаючи в (9) послідовно C_j δ_{ij}, де δ_{ij} — символ Кронекера $(i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$, одержимо формальну фундаментальну систему розв'язків у вигляді

$$y_{ij} = \frac{1}{\varphi_{j1}} \cdot \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} \exp \int A_{j1} dt \quad (i, j = 1, 2, 3, \ldots, n), \tag{10}$$

де Δ_{ij} — визначники, що одержуються із Δ заміною i-го стовпчика вектором $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ при $j = 1$, вектором $(0, 1, 0, \ldots, 0)$ при $j = 2$ і т. д., вектором $(0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$ при $j = n$. Із (10) знаходимо такі співвідношення:

$$\frac{y_{ij}}{y_{1j}} = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta_{1j}} \; (i, j = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{11}$$

Якщо врахувати формули (6) і (11), із рівності (5) одержимо

$$\varphi_{j1} = \exp \left(- \frac{\delta'_j}{\Delta} dt \right), \tag{12}$$

де δ'_j — визначник, що являє собою j-й доданок похідної визначника Δ, якщо його диференціювати відповідно по першому, другому (і т. д.), n-му рядку.

Враховуючи (4) і (6), рівність (3) можна записати так:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ik} \frac{z_{ji1}}{z_{jk1}} \lambda_{ij} = \lambda_{jk} A_{j1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{13}$$

З цих систем рівнянь одержимо

$$P_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^{n} A_{k1} \Delta_{ik} z_{kj1} \lambda_{jk} \quad (i, j = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{14}$$

Звідси знаходимо

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ii} = \sum_{k=1}^{n} A_{k1}, \tag{15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} \Delta_{js} = A_{s1} \Delta_{is}. \tag{16}$$

При перетвореннях тут використано [2]. Фундаментальна система розв'язків (10), якщо врахувати (12), прийме вигляд

$$y_{ij} = \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} \exp \int \left(\frac{\delta'_j}{\Delta} + A_{j1} \right) dt \quad (i, j = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{17}$$

Легко довести, користуючись роботою [2], що ця система розв'язків є лінійно-незалежною і що її визначник дорівнює $\exp \int \sum_{i=1}^{n} P_{ii} dt$, що відповідає тотожності Якобі [3]. Безпосередньо підставляючи формальні розв'язки (17) в систему рівнянь (1), переконуємось, що вони задовольняють їх з точністю до доданка

$$\left[\Delta'_{ik}-\frac{\Delta_{ik}}{\Delta}(\Delta'-\delta'_k)\right]\frac{1}{\Delta}\exp\int\left(\frac{\delta'_k}{\Delta}+A_{k1}\right)dt, \qquad (18)$$

який дорівнює 0, коли $z'_{ji1}=0$ $(i,j=1,2,3,\ldots,n)$. В цьому випадку система рівнянь (1) інтегрується в замкнутій формі. Слід відзначити, що $z_{ij1}=0$ не тільки тоді, коли всі $P_{ij}=\text{const}$, але і в багатьох випадках, коли P_{ij} є функціями змінної t. Якщо z'_{ij1} не дорівнюють 0, але прямують до нього, коли $t\to+\infty$, і якщо при цьому $\Delta\neq0$ і виконуються нерівності

$$-\infty\leqslant\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{\delta'_k}{\Delta}+A_{k1}\right)dt<+\infty \quad (k=1,2,3,\ldots,n),$$

то (18) прямує до нуля при $t\to+\infty$. Формули (17) точно задовольняють систему (1), якщо до правої її частини дописати (18).

Ця обставина дає можливість сформулювати достатню умову стійкості тривіального розв'язку системи рівнянь (1). Тривіальний розв'язок системи рівнянь (1) стійкий, якщо виконуються такі умови:

1) коефіцієнти $P_{ij}(t)$ — диференційовні функції на інтервалі $[t_0,+\infty)$;

2) $\int_{t_0}^{t}|z'_{ji1}|\,dt<\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_{t_0}^{t}\sum_{i=1}^{n}P_{ii}dt>-\infty$. $\Delta\neq0$ для всіх $t\geqslant t_0$; $\lim\limits_{t\to+\infty}\Delta\neq0$;

3) $$-\infty\leqslant\int_{t_0}^{\infty}\left(\frac{\delta'_k}{\Delta}+A_{k1}\right)dt<+\infty \quad (k=1,2,3,\ldots,n).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, «Наука», М., 1965.
2. Л. Я. Окунєв, Вища алгебра, «Радянська школа», К., 1950.
3. В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1950.

Надійшла 27.II 1970 р.

Хмельницький технологічний інститут
побутового обслуговування