УДК 517.917

Про одну ітераційну формулу побудови функцій Ляпунова

А. А. Мартинюк

Побудова функцій Ляпунова для лінійних систем диференціальних рівнянь із сталими коефіцієнтами викладається в статті [1]. Для систем із змінними коефіцієнтами ця задача ускладнюється і до останнього часу не має ефективного способу її розв'язання в загальному випадку. Різні частинні випадки цієї проблеми досліджувались в роботах [2—6] та ін.

Метою цієї замітки є виклад загального методу побудови функцій Ляпунова на основі способу Ляпунова [7] інтегрування лінійних рівнянь із змінними коефіцієнтами. Застосовуючи реалізацію швидкозбіжного ітераційного процесу, запропонованого в [8] і розвиненого автором [9], для широкого класу систем лінійних диференціальних рівнянь одержано рекурентні співвідношення для побудови відповідних їм квадратичних функцій.

1. Алгоритм і його збіжність. Розглядається система диференціальних рівнянь

$$\frac{dx_s}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} p_{si}(t)\, x_i, \quad s = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.1}$$

коефіцієнти якої $p_{si}(t)$, $s, i = 1, 2, \ldots, n$, є неперервними функціями t для всякого додатного значення $t \geqslant 0$.

Як показав А. Д. Горбунов [10], необхідною і достатньою умовою стійкості нульового розв'язку системи (1.1) є існування додатно визначеної квадратичної форми

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s,r=1}^{n} b_{sr}(t)\, x_s x_r \tag{1.2}$$

фазових змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, повна похідна якої по часу згідно з розглядуваною системою тотожно дорівнює нулю або є постійно від'ємною функцією.

У цьому випадку коефіцієнти $b_{sr}(t)$ квадратичної форми (1.2) визначаються з системи диференціальних рівнянь *

$$\frac{db_{sr}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (p_{sj}b_{jr} + b_{sr}p_{rj}) \tag{1.3}$$

або

$$\frac{db_{sr}}{dt} - \sum_{j=1}^{n} (p_{sj}b_{jr} + b_{sr}p_{rj}) = \delta_{sr}0^{-1}, \quad s, r = 1, 2, \ldots, n,$$

де символ 0^{-1} означає довільну сталу від'ємну функцію, δ_{sr} — символ Кронекера.

Далі систему диференціальних рівнянь (1.3) замінимо новою системою

$$\frac{db_{sr}}{dt} = \varepsilon \sum_{j=1}^{n} (p_{sj}b_{jr} + b_{sr}p_{rj}), \tag{1.4}$$

де ε — допоміжний параметр.

Розв'язок системи рівнянь (1.4) шукаємо у вигляді рядів

$$b_{sr}(t) = b_{sr}^{(0)} + \varepsilon b_{sr}^{(1)} + \ldots + \varepsilon^{\nu} b_{sr}^{(\nu)} + \ldots \tag{1.5}$$

Припустимо також, що

$$b_{sr}^{(0)} = \delta_{sr} \qquad b_{sr}^{(\nu)}(0) = 0 \quad (\nu = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1.6}$$

Підставляючи ряди (1.5) в систему рівнянь (1.4) та прирівнюючи члени при однакових степенях ε, одержуємо послідовність рекурентних систем диференціальних рівнянь для визначення функцій $b_{sr}^{(\nu)}$:

$$\frac{db_{sr}^{(1)}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (p_{sj}b_{jr}^{(0)} + b_{sj}^{(0)}p_{jr}), \tag{1.7}$$

$$\frac{db_{sr}^{(2)}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (p_{sj}b_{jr}^{(1)} + b_{sj}^{(1)}p_{jr}), \tag{1.8}$$

. . . .

$$\frac{db_{sr}^{(\nu)}}{dt} = \sum_{j=1}^{n} (p_{sj}b_{jr}^{(\nu-1)} + b_{sj}^{(\nu-1)}p_{jr}), \quad s, r = 1, 2, \ldots, n \tag{1.9}$$

. . . .

Із системи диференціальних рівнянь (1.9) при початкових значеннях (1.6) функції $b_{sr}^{(\nu)}$ визначаються за формулами

$$b_{sr}^{(\nu)}(t) = \int_0^t \left(\sum_{j=1}^{n} (p_{sj}b_{jr}^{(\nu-1)} + b_{sj}^{(\nu-1)}p_{jr})\right) dt, \quad \nu \geqslant 1. \tag{1.10}$$

* Тут і далі для скорочення запису приймається $b_{sr} = b_{sr}(t)$, $p_{sr} = p_{sr}(t)$ і т. д.

Нехай h — додатне число не менше при всякому $t > 0$ найбільшого з модулів коефіцієнтів $p_{sr}(t)$.

Із (1.10) маємо:

$$|b_{sr}^{(1)}(t)| \leqslant n \int_0^t h dt + n \int_0^t h dt. \qquad (1.11)$$

Для $\nu = 2$ одержуємо

$$|b_{sr}^{(2)}(t)| \leqslant 4n^2 \int_0^t \left(h \int_0^t h dt \right) dt. \qquad (1.12)$$

Інтегруючи частинами вираз, що стоїть в правій частині нерівності (1.12), неважко одержати оцінку

$$|b_{sr}^{(2)}(t)| \leqslant \frac{2^2 n^2}{1 \cdot 2} \left(\int_0^t h dt \right)^2. \qquad (1.13)$$

Аналогічно для коефіцієнтів $b_{sr}^{(\nu)}(t)$ одержуємо

$$|b_{sr}^{(\nu)}(t)| \leqslant \frac{2^\nu n^\nu}{1 \cdot 2 \ldots \nu} \left(\int_0^t h dt \right)^\nu. \qquad (1.14)$$

Враховуючи оцінки (1.11) — (1.14), знаходимо, що функціональний ряд (1.5) мажорується рядом

$$B(t) = e^{\varepsilon 2n \int_0^t h dt},$$

який збігається абсолютно і рівномірно при всіх $\varepsilon > 0$ і $t \geqslant 0$. Покладаючи $\varepsilon = 1$, одержуємо, що ряд

$$b_{sr}(t) = b_{sr}^{(0)} + b_{sr}^{(1)}(t) + \ldots + b_{sr}^{(\nu)}(t) + \ldots \qquad (1.15)$$

збігається абсолютно і рівномірно при $t \geqslant 0$. Виконуючи почленне диференціювання ряду (1.15), переконуємося, що його сума є розв'язком системи рівнянь (1.3). Цей розв'язок перетворюється в δ_{sr} при $t = 0$. Почленне диференціювання функціонального ряду (1.15) можливе, оскільки останній збігається абсолютно і рівномірно.

Виходячи з викладеного, формулюємо таке твердження.

Теорема 1. *Якщо нульовий розв'язок системи* (1.1) *асимптотично стійкий, то для неї існує квадратична форма* (1.2), *коефіцієнти* $b_{sr}(t)$ *якої зображуються абсолютно і рівномірно збіжними рядами* (1.15).

2. Побудова початкового наближення $\| b_{sr}^{(0)} \| = B^{(0)}$. Використовуючи ідеї М. Г. Четаєва [2], відзначимо деякі засоби вибору елементів матриці початкового наближення $b_{sr}^{(0)}$.

Випадок 1. Нехай існують границі

$$\lim p_{sk}(t) = d_{sk} \text{ при } t \to \infty.$$

Припускаючи, що матриця $D = \| d_{sk} \|$, $d_{sk} = p_{sk}(\infty)$, стійка, початкове наближення $B^{(0)}$ визначається із співвідношення Ляпунова

$$D^* B^{(0)} + B^{(0)} D = -G \qquad (2.1)$$

за формулою [11]

$$B^{(0)} = -\int_0^\infty e^{D^* t} G e^{Dt} dt, \qquad (2.2)$$

де G — наперед задана, визначено додатна матриця.

Зазначимо, що формулу (2.2) неважко зобразити у вигляді

$$B^{(0)} = -(C^{*})^{-1} \left\| \frac{\widetilde{g}_{sr}}{\bar{\lambda}_s + \lambda_r} \right\| C^{-1}, \tag{2.3}$$

де $C^{-1} = \| \lambda_r^{(s-1)} \| \, r, s = 1, 2, \ldots, n$ — матриця Вандермонда, $\widetilde{G} = C^{*}GC = \| \widetilde{g}_{sr} \|$, $\bar{\lambda}_s$ — комплексно спряжені характеристичні числа матриці D.

Випадок 2. Функції $p_{sk}(t)$ повільно змінюються так, що їх числові значення в проміжку $(0, T)$ мало відрізняются від їх початкових значень, що відповідають моменту $t = 0$.

При цьому початкове наближення $B^{(0)}$ обчислюється за формулами (2.1) — (2.3) з матрицею $D = P(0)$, а процес послідовного обчислення функцій $b_{sr}^{(\nu)}(t)$ буде практично виконуваний і ряди, що зображують $b_{sr}(t)$, будуть збігатися тим швидше, чим повільніше змінюються функції $p_{sk}(t)$.

Випадок 3. Функції $p_{sk}(t)$ періодичні за часом t з одним і тим же періодом ω. Матрицю D визначимо формулою

$$D = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} P(s)\, ds$$

і наступні обчислення проводимо аналогічно випадку 1.

Припускається, що в перелічених випадках корені рівняння $\det(D - \lambda E) = 0$ мають від'ємні дійсні частини.

3. Чисельна реалізація матричного підходу. Побудова функції Ляпунова у вигляді ряду [12 стор. 90]

$$V(x) = V_2(x) + V_3(x) + \ldots + V_m(x) + \ldots,$$

де $V_m(x)$ — однорідні форми m-го степеня відносно значень $x_1, \ldots, x_n$, що розв'язують систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_2}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik} x_k \right) = \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V_m}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^{n} p_{ik} x_k \right) = R_m(x_1, \ldots, x_n), \quad m = 3, 4, \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

R_m — відома форма m-го степеня, якщо знайдемо вже форми $V_2, \ldots, V_{m-1}$, $\varphi(x)$ — додатно визначена квадратична форма $x_1, \ldots, x_n$, або у вигляді рядів (1.15) природно приводить до поняття наближеної функції Ляпунова. Зупинимося детальніше на цьому понятті.

Означення. Квадратичну форму (1.2) назвемо ε-наближеною функцією Ляпунова, якщо її матриця $\| \widetilde{b}_{sr} \|$ така, що має місце нерівність

$$\left\| \frac{d\widetilde{b}_{sr}}{dt} - \sum_{j=1}^{n} (p_{sj} \widetilde{b}_{jr} + \widetilde{b}_{sj} r_{jr}) \right\| \leqslant \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 - \text{const}). \tag{3.1}$$

Зокрема, матриця $\| \widetilde{b}_{sr} \|$ одержується кожного разу, коли в рядах (1.15) обмежуютья скінченними відрізками.

Систему (1.1) запишемо у векторно-матричній формі

$$\frac{dx}{dt} = -P(t)x, \tag{3.2}$$

де x — n-вимірний вектор, $P(t)$ — матриця розміром $n \times n$, $t \in (a, b)$. Для визначення складових $B^{(\nu)}(t) = \| b_{sr}^{(\nu)} \|$ рядів (1.5) маємо тепер матричні рівняння

$$\frac{dB^{(\nu)}}{dt} = P^{*}B^{(\nu-1)} + B^{(\nu-1)}P, \quad \nu \geqslant 1, \tag{3.3}$$

і у відповідності з (1.6)

$$B^{(0)} = E, \quad B^{(\nu)}(a) = 0, \ \nu \geqslant 1.$$

Має місце таке твердження.

Теорема 2. *Якщо система* (3.2) *така, що ряд*

$$P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} P_k (t-a)^k \tag{3.4}$$

збігається абсолютно і рівномірно при всіх $a < t < b$, *то матриці* $B^{(\nu)}(t)$ *квадратичної форми* $V(t, x)$ *подаються у вигляді рядів*

$$B^{(\nu)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} B_k^{(\nu)} (t-a)^k \tag{3.5}$$

рівномірно і абсолютно збіжних при $a < t < b$, *а коефіцієнти* $B_k^{(\nu)}$ *обчислюються за рекурентними формулами*

$$B_k^{(\nu)} = \sum_{\mu=0}^{k-1} \binom{k-1}{\mu} [P_\mu^{*} B_{k-1-\mu}^{(\nu-1)} + B_{k-1-\mu}^{(\nu-1)} P_\mu], \tag{3.6}$$

де

$$\binom{k-1}{\mu} = \frac{(k-1)!}{\mu!\,(k-1-\mu)!} \quad (\nu \geqslant 1, \ k = 1, 2, \ldots),$$

P_μ^{*} — *відомі коефіцієнти розвинення в ряд виду* (3.4) *транспонованої матриці* $P^*(t)$.

Одержання формули (3.6) здійснюється прямою підстановкою рядів (3.5), (3.4) в рівняння (3.3) (див. також [13]).

При заданому ε можна назвати такі $N(\varepsilon)$ і $M(\varepsilon)$, що при підстановці часткової суми

$$\widetilde{B}(t) = \sum_{\nu=0}^{M(\varepsilon)} \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)} (k!)^{-1} B_k^{(\nu)} (t-a)^k$$

має місце умова (3.1).

Відзначимо тепер одну видозміну формул (3.6), коли матриця $P(t)$ — поліном, розв'язки $B^{(\nu)}(t)$ також визначені у вигляді поліномів, тобто

$$\begin{gathered} P(t) = \sum_{k=0}^{M} A_k (t-a)^k, \quad A_k = (k!)^{-1} P_k, \\ B^{(\nu)}(t) = \sum_{k=0}^{N} C_k^{(\nu)} (t-a)^k, \quad C_k = (k!)^{-1} B_k^{(\nu)}, \end{gathered} \tag{3.7}$$

де M, L — деякі сталі числа

Формули (3.6), беручи до уваги (3.7), перетворюються до вигляду

$$C_0^{(0)} = E,$$

$$C_{k+1}^{(\nu)} = \frac{1}{k+1}\left\{\sum_{m=0}^{k-1} A_m^* C_{k-1-m}^{(\nu-1)} + \sum_{m=0}^{k-1} C_{k-1-m}^{(\nu-1)} A_m\right\} \text{ при } 0 \leqslant k \leqslant M+1,$$

$$C_{k+1}^{(\nu)} = \frac{1}{k+1}\left\{\sum_{m=0}^{M} A_m^* C_{k-1-m}^{(\nu-1)} + \sum_{m=0}^{M} C_{k-1-m}^{(\nu-1)} A_m\right\} \text{ при } k \geqslant M+1.$$

Коефіцієнти $A_m = 0$ при $k > M$.

4. Зауваження. 1. Наведені в п. 3 рекурентні формули легко програмуються на ЦОМ і побудова наближеної функції Ляпунова може бути проведена з будь-якою наперед вказаною точністю.

2. Функція $V(t, x)$ означена у вигляді збіжного ряду (1.15) в досить малому околі початку координат допускає аналітичне продовження вздовж всякого променя, що виходить з початку координат аж до границі області стійкості системи (1.1).

3. Розглядаючи сім'ю поверхонь $V^{(\nu)}(t, x) = -\mu$ ($\mu > 0$ — const) $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ можна як завгодно точно наблизитись до границі області стійкості в просторі параметрів системи (1.1).

4. Одержані результати мають узагальнення на системи

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n),$$

праві частини яких в області $\Sigma x_s^2 \leqslant H$, $t \geqslant 0$, дійсні і неперервні функції всіх змінних (t, x) і аналітичні щодо $(x_1, \ldots, x_n)$. Ці результати будуть предметом іншої роботи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Е. А. Барбашин, О построении функций Ляпунова, Дифференциальные уравнения, т. 4, № 12, 1968.
2. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения. Работы по аналитической механике, Изд-во АН СССР, М., 1962.
3. А. А. Лебедев, Об одном методе построения функций Ляпунова, ПММ, т. 21, вып. 1, 1957.
4. Б. С. Разумихин, Об устойчивости систем с малым множителем, ПММ, т. 21, вып. 4, 1957.
5. М. К. Яковлев, Об одном способе построения функции Ляпунова для линейных систем с переменными коэффициентами, Дифференциальные уравнения, т. 1, № 11, 1965.
6. М. О. Пустовойтов, До побудови функції Ляпунова методом малого параметра, ДАН УРСР, сер. А, № 10, 1969.
7. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
8. Н. В. Азбелев, И. М. Смолин, З. Б. Цалюк, Об одном приближенном методе построения функции Коши, ДАН СССР, № 3, 1960.
9. А. А. Мартынюк, Об одной реализации быстросходящегося итерационного процесса решения дифференциальных уравнений и некоторых применениях, УМЖ, т. 22, № 6, 1970.
10. А. Д. Горбунов, Некоторые вопросы качественной теории обыкновенных линейных однородных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, Уч. зап. МГУ, вып. 165, Математика, т. 7, 1954.
11. Р. Беллман, Введение в теорию матриц, «Наука», М., 1969.
12. В. И. Зубов, Методы А. М. Ляпунова и их применение, Изд-во ЛГУ, 1957.
13. А. А. Мартинюк, Про побудову інтегральних матриць, ДАН УРСР, сер. А, № 1, 1971.

Надійшло 29.XII 1969 р.

Інститут математики АН УРСР