УДК 517.54

Про одне узагальнення теорем Лівінгстона

Р. В. Ніколаєва, Л. Г. Рєпніна

Нехай $\mathfrak{R}$ деякий клас регулярних в області $E\{z: |z| < 1\}$ функцій $F(z)$, які задовольняють умови: $F(0) = 0$, $F'(0) = 1$. Умовимось вважати: 1) $\mathfrak{R} = S_\alpha^*$, 2) $\mathfrak{R} = S_\alpha^0$, 3) $\mathfrak{R} = \check{S}_\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$, якщо $\mathfrak{R}$ вміщує в собі такі і тільки такі функції $F(z)$ класу $\mathfrak{R}$, які задовольняють в E відповідно умови.

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{zF'(z)}{F(z)}\right\} > \alpha. \tag{I}$$

$$\operatorname{Re}\left\{1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)}\right\} > \alpha. \tag{II}$$

$$\operatorname{Re} F'(z) > \alpha. \tag{III}$$

Нарешті. $\mathfrak{R} = \widetilde{S}_\alpha$, якщо $\mathfrak{R}$ складається з усіх тих і тільки тих функцій $F(z)$, що:

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{F'(z)}{g'(z)}\right\} > \alpha \text{ в } E, \tag{IV}$$

де $g(z)$ деяка, взагалі залежна від $F(z)$, функція класу S_α^0 при $\alpha = 0$.

Класи S_α^* і S_α^0 називають відповідно класом зірчастих порядку α і класом опуклих порядку α однолистих нормованих в E функцій. Класи $\check{S}_\alpha$ і $\widetilde{S}_\alpha$ умовимося називати центрованими класами відповідно функцій з обмеженим обертанням і майже опуклих функцій в E.

Якщо розглянути клас P регулярних в E функцій $p(z)$ таких, що в E $\operatorname{Re} p(z) > 0$, то легко бачити, що необхідною і достатньою умовою належності функції $F(z)$ до одного з вище зазначених класів є існування такої функції $p(z) \in P$, що відповідно

$$\frac{zF'(z)}{F(z)} = q(z, h), \tag{I*}$$

$$1 + \frac{zF''(z)}{F'(z)} = q(z, h), \tag{II*}$$

$$F'(z) = q(z, h), \tag{III*}$$

$$F'(z) = g'(z) \cdot q(z, h), \tag{IV*}$$

де $q(z, h) = \dfrac{p(z) + h}{1 + h}$, $h = \dfrac{\alpha}{1 - \alpha}$, $g(z) \in S_\alpha^0$ при $\alpha = 0$.

Через $Q(\mathfrak{R}; \lambda, \mu)$, де $\lambda \geqslant 0$, $\mu > 0$, $\lambda + \mu = 1$, позначатимемо такий клас регулярних в E функцій $f(z)$, який ізоморфно зв'язаний з класом $\mathfrak{R}$ формулою

$$f(z) = \lambda F(z) + \mu z F'(z), \tag{1}$$

де $F(z) \in \mathfrak{R}$.

Умовимось позначати $r_{\mathfrak{R}}$ верхню границю таких чисел $r \in (0, 1)$, що кожна функція $f(z) \in Q(\mathfrak{R}, \lambda, \mu)$ належить класу $\mathfrak{R}$ в крузі $|z| < r$.

Якщо $\mathfrak{R} = S_\alpha^*$, то $r_{\mathfrak{R}}$ є радіус зірчастості порядку α, при $\mathfrak{R} = S_\alpha^0$ — радіус опуклості порядку α і т. д.

Ми знайшли точні значення $r_{\mathfrak{R}}$ тільки для перших трьох класів.

Із наших результатів, зокрема, випливають результати Лівінгстона [1].

Теорема 1. *Нехай* $\mathfrak{R} = S_\alpha^*$, $\alpha \in [0, 1)$. *Позначимо* $\beta = \dfrac{\lambda + h}{\mu}$, $\gamma = 1 - \alpha$, $\delta = \dfrac{\lambda}{\mu}$, $M = \alpha\beta(1 + \gamma)$, $N = 2\alpha + \delta$. *Тоді, якщо* α_0 *є найменший корінь рівняння*

$$4\alpha^4(\delta^2 + 2\delta + 5) + 4\alpha^3(\delta^3 - \delta^2 + \delta - 13) - \alpha^2(12\delta^3 + 9\delta^2 + 58\delta - 15) + \\ + \alpha(8\delta^3 + 28\delta + 12) - 4 = 0 \tag{2}$$

на $(0, 1)$, *то при* $\alpha_0 \leqslant \alpha < 1$ *радіус зірчастості порядку* α *можна визначити формулою*

$$r_{\mathfrak{R}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{M} + N - 1}{2\sqrt{M} + N + 1}}. \tag{3}$$

а при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$ — *формулою*

$$r_{\mathfrak{R}} = \frac{1+\beta}{1+\gamma-\alpha\beta+\sqrt{\Delta}}, \tag{4}$$

де $\Delta = 2 + \gamma^2 (1+\beta^2) - 2\alpha\beta(1+\gamma)$.

Екстремальна функція має вигляд

$$f_0(z) = \lambda F_0(z) + \mu z F_0'(z), \tag{5}$$

де в першому випадку

$$F_0(z) = z\,[(1-ze^{i\theta})(1-ze^{-i\theta})]^{\alpha-1} \tag{6}$$

(θ — *деяке певне число з* $[0, \pi]$), а в другому —

$$F_0(z) = z(1-z)^{-2(1-\alpha)}. \tag{7}$$

Доведення. $F(z) \in S_\alpha^*$, $0 \leqslant \alpha < 1$.

Із (1) на основі (I) і (I*) маємо

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \alpha + \gamma p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)+\beta}.$$

Позначимо

$$L(r) = \min_{|z|=r<1} \min_{p\in P} \operatorname{Re}\left\{\alpha + \gamma p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z)+\beta}\right\}.$$

Тоді найменше значення $r \in [0, 1)$, для якого $L(r) = 0$, дає радіус зірчастості класу $Q(S_\alpha^*; \lambda, \mu)$. Для визначення $L(r)$ користуємося методом робіт [2, 3], завдяки чому

$$\min_{\substack{|z|=r<1\\ p(z)\in P}} \operatorname{Re}\ \{A(p(z)) + B(p(z))\, zp'(z)\},$$

де $A(\omega)$ і $B(\omega)$ однозначні і неперервні в $\operatorname{Re}\omega > 0$, зводиться до відшукання мінімуму функції

$$I(\omega) = \operatorname{Re}\left\{A(\omega) + \frac{1}{2}(\omega^2-1)B(\omega)\right\} - \frac{1}{2}|B(\omega)|(\rho^2-\rho_0^2)$$

в області $D\{\omega: |\omega - a| < \rho\}$, де $\omega \equiv p(z) \in P$, $\rho_0 = |\omega - a|$, $a = \dfrac{1+r^2}{1-r^2}$, $\rho = \dfrac{2r}{1-r^2}$, $r = |z| < 1$.

У нашому випадку

$$I(\omega) = \operatorname{Re}\left(\alpha + \gamma\omega + \frac{1}{2}\frac{\omega^2-1}{\omega^2+\beta}\right) - \frac{1}{2}\frac{\rho^2-\rho_0^2}{|\omega+\beta|}.$$

Легко бачити, що $\min I(\omega)$ в області D при фіксованому значенні $|z| = r < 1$ досягається на діаметрі $\operatorname{Im}\omega = 0$. Враховуючи це, зводимо дослідження до визначення найменшого значення функції

$$l(R) = \alpha - \beta(2+\gamma) - a + (1+\gamma)R + \frac{1}{R}(a\beta+\beta^2)$$

на сегменті $T \equiv [a - \rho + \beta,\ a + \rho + \beta]$. Абсолютний мінімум $l(R)$ при $0 < R < +\infty$ має в точці $R_0 = \sqrt{\dfrac{a\beta+\beta^2}{1+\gamma}} < a + \rho + \beta$, він дорівнює

$$l(R_0) = 2\sqrt{(1+\gamma)(a\beta+\beta^2)} - a + \alpha - \beta(2+\gamma).$$

Якщо $R_0 \geqslant a - \rho + \beta$, то $l(R_0)$ є мінімумом $l(R)$ на сегменті T. Якщо ж $R_0 < a - \rho + \beta$, то $l(R)$ має мінімум на T в точці $R_1 = a - \varrho + \beta$ і він дорівнює

$$l(a - \rho + \beta) = \alpha - \beta(2 + \gamma) - a + (1 + \gamma)(a - \rho + \beta) + \frac{a\beta + \beta^2}{a - \rho + \beta}.$$

Шуканий радіус знаходиться або з рівняння $l(R_0) = 0$ і визначається формулою (3), або з рівняння $l(R_1) = 0$ і визначається формулою (4).

Критичне значення $\alpha = \alpha_0$, що визначає перехід від формули (3) до формули (4), є найменшим на (0,1) коренем рівняння (2), яке можна одержати виключенням a з рівнянь $l(R_0) = 0$ і $R_0 = R_1$.

Легко показати, що при $\alpha_0 \leqslant \alpha < 1$ треба користуватись формулою (3), а при $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0$ — формулою (4).

Точність оцінок (3) і (4) підтверджується функціями (5), (6) і (5), (7) відповідно, причому формула (6) може бути одержана з (I*) при

$$p(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + ze^{i\theta}}{1 - ze^{i\theta}} + \frac{1 + ze^{-i\theta}}{1 - ze^{-i\theta}}\right),$$

де θ деяке певне число з $[0, \pi]$, а формула (7) — при $p(z) = \dfrac{1 + z}{1 - z}$.

Примітка 1. При $\alpha = 0$ і $\beta = 1$ з (4) можна одержати результат Лівінгстона: $r_{\mathfrak{R}} = \dfrac{1}{2}$; при $\alpha = 0$, $\beta = 0$ — класичний результат: $r_{\mathfrak{R}} = 2 - \sqrt{3}$.

Примітка 2. Можна показати, що формули (3) і (4) визначають також радіус однолистості класу $Q(S_\alpha^*; \lambda, \mu)$ при вказаних відносно α умовах.

Теорема 2. *Нехай* $\mathfrak{R} = S_\alpha^0$, $\alpha \in [0, 1)$. *Тоді радіус опуклості* $r_{\mathfrak{R}}$ *класу* $Q(S_\alpha^0; \lambda, \mu)$ *однаковий з радіусом зірчастості класу* $Q(S_\alpha^*; \lambda, \mu)$.

Доведення. З (1) на основі (II*) маємо:

$$1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \alpha + \gamma p(z) + \frac{zp'(z)}{p(z) + \beta}.$$

Таким чином, ця задача зводиться до попередньої.

Примітка 3. На основі (1) маємо:

$$\frac{f'(z)}{F'(z)} = 1 + \mu\frac{zF''(z)}{F'(z)}.$$

Тому, з (II) випливає $\operatorname{Re}\left\{\dfrac{f'(z)}{F'(z)}\right\} > \lambda + \mu\alpha > 0$ при $\lambda > 0$, $\mu > 0$ і довільному $\alpha \in [0, 1)$. Це означає, що $f(z)$ майже опукла відносно $F(z) \in S_\alpha^0$ в E і, отже, однолиста в E при $\lambda > 0$, $\mu > 0$ і довільному $\alpha \in [0, 1)$.

Теорема 3. *Нехай* $\mathfrak{R} = \check{S}_\alpha$, $\alpha \in [0, 1)$. *Позначимо* $h_0 = \mu^3/(1 + \sqrt{1 + 3\mu^2})^2$. *Радіус центрованого обмеженого обертання класу* $Q(\check{S}_\alpha; \lambda, \mu)$ *при* $h \geqslant h_0$ *можна визначити за формулою*

$$r_{\mathfrak{R}} = \sqrt{\frac{1 - \mu + 2\sqrt{\mu h}}{1 + \mu + 2\sqrt{\mu h}}}, \tag{8}$$

а при $0 \leqslant h \leqslant h_0$ — *формулою*

$$r_{\mathfrak{R}} = \frac{1+h}{\mu - h + \sqrt{\mu^2 - 2\mu h + 1}}. \tag{9}$$

Екстремальні функції визначаються формулою (5), *де у випадку* (8) *маємо*

$$F_0(z) = z - (1-\alpha)\,[2z + e^{i\theta}\ln(1 - ze^{-i\theta}) + e^{-i\theta}\ln(1 - ze^{i\theta})],$$

причому θ — *деяке певне число з* $[0, \pi)$, *у випадку* (9)

$$F_0(z) = z - 2(1-\alpha)\,[z + \ln(1-z)].$$

Доведення. $F(z) \in \check{S}_\alpha$, $0 \leqslant a < 1$.

Із (1) на основі (III) маємо: $(1+h) f'(z) = h + p(z) + \mu z p'(z)$. Аналогічно попередньому (теорема 1) задача може бути зведена до відшукання найменшого значення функції $l(\xi) = \xi^2 + (1 + a\mu)\xi + a + h$ на відрізку $-\rho \leqslant \xi \leqslant \varrho \left(a = \frac{1+r^2}{1-r^2},\ \varrho = \frac{2r}{1-r^2} \right)$. При $h \geqslant h_0$, де $h_0 = \mu^3/(1 + \sqrt{1+3\mu^2})^2$, цього значення досягає функція в точці $\xi_0 = -(1 + a\mu)/2\mu$, $\xi_0 \in [-\varrho, +\varrho)$, при $0 \leqslant h \leqslant h_0$ — в точці $\xi_1 = -\varrho$.

В першому випадку радіус знаходиться з рівняння $l(\xi_0) = 0$ і визначається формулою (8), в другому — з рівняння $l(-\rho) = 0$ і визначається формулою (9). Значення h_0 знайдено виключенням a з рівнянь $l(\xi_0) = 0$ і $\xi_0 = \xi_1$.

Примітка 4. При $h = 0$ і $\mu = \frac{1}{2}$ із (9) одержуємо результат Лівінгстона: $r_{\mathfrak{R}} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Примітка 5. Формули (8) і (9) визначають також радіус однолистості класу $Q(\check{S}_\alpha; \lambda, \mu)$ при вказаних відносно h умовах.

Теорема 4. *Нехай* $\mathfrak{R} = \tilde{S}_\alpha$, $\alpha \in [0, 1)$. *Позначимо через* r_0 *єдиний на* $(0, 1)$ *корінь рівняння*

$$\Psi(r, h, \delta) \equiv 1 - \frac{2(1+h)r}{[1 - r^2 + h(1-r)^2]\left[\frac{1-r}{1+r} + h + \delta(1+h)\right]} = 0, \tag{10}$$

де $\delta = \frac{\lambda}{\mu}$, $|z| = r < 1$. *Тоді радіус майже опуклості класу* $Q(\tilde{S}_\alpha; \lambda, \mu)$ *не менший за* r_0.

Доведення. $F(z) \in \tilde{S}_\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$. Із (1) на основі (IV) маємо

$$\frac{f'(z)}{\varphi'(z)} = \frac{p(z) + h}{1+h} + \frac{zp'(z)}{p_1(z) + h + \delta(1+h)},$$

де $1 + \frac{z\Phi''(z)}{\Phi'(z)} = \frac{p_1(z) + h}{1+h}$, $\varphi(z) = \lambda\Phi(z) + \mu z\Phi'(z)$, $p_1(z) \in P$. Функція $\varphi(z)$ регулярна в області E і, як можна показати, опукла в деякому крузі $|z| = r_0$, де r_0 — єдиний на $(0,1)$ корінь рівняння (10). Дійсно, користуючись відомими точними оцінками

$$|zp'| \leqslant \frac{2r\,\mathrm{Re}\,(p+h)}{1-r^2+h(1-r)^2}, \quad \frac{1}{|\delta+p|} \leqslant \frac{1}{\delta+\dfrac{1-r}{1+r}}, \tag{11}$$

$$\delta \geqslant 0, \ |z| = r < 1, \quad p \in P,$$

маємо в E

$$\mathrm{Re}\left\{1+\frac{z\varphi''(z)}{\varphi'(z)}\right\} = \mathrm{Re}\left(\frac{p_1+h}{1+h} + \frac{zp_1'}{1+h}\frac{1}{\delta+\dfrac{p_1+h}{1+h}}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \mathrm{Re}\,\frac{p_1+h}{1+h} - \left|\frac{zp_1'}{1+h}\right|\left|\frac{1}{\delta+\dfrac{p_1+h}{1+h}}\right| \geqslant \Psi(r,h,\delta)\,\mathrm{Re}\,\frac{p_1+h}{1+h}.$$

Легко показати, що при фіксованому значенні h і δ і $r < r_0$

$$\Psi(r,h,\delta) > 0. \tag{12}$$

Тоді з (11) і (12) випливає $\mathrm{Re}\,\dfrac{f'(z)}{\varphi'(z)} \geqslant \mathrm{Re}\,\dfrac{p(z)+h}{1+h}\Psi(r,h,\delta) > 0$ в $|z| < r_0$, що і доводить теорему.

Примітка 6. При $h = 0$ і $\delta = 1$ одержуємо результат Лівінгстона: $r_0 = \dfrac{1}{2}$.

Примітка 7. Якщо $\Phi(z) \in S^0_{\alpha_1}$, $0 \leqslant \alpha_1 < 1$, то $1+\dfrac{z\Phi''(z)}{\Phi'(z)} = \dfrac{p_1(z)+h_1}{1+h_1}$, $h_1 \neq h$. Одержуємо дві функції:

$$\Psi(r,h_1,h_1,\delta) = 1 - \frac{2(1+h_1)r}{[1-r^2+h_1(1-r)^2]\left[\dfrac{1-r}{1+r}+h_1+\delta(1+h_1)\right]},$$

$$\Psi(r,h,h_1,\delta) = 1 - \frac{2(1+h_1)r}{[1-r^2+h(1-r)^2]\left[\dfrac{1-r}{1+r}+h_1+\delta(1+h_1)\right]}.$$

Тому радіус майже опуклості $r_{\mathfrak{R}}$ визначається з рівняння

$$\Psi(r,h_0,h_1,\delta) = 0, \text{ де } h_0 = \min(h,h_1).$$

ЛІТЕРАТУРА

1. A. E. Livingston, On the radius of univalence of certain analytic functions, Proc. Amer. Math. Soc., 17, № 2, 1966, 352—357.
2. В. А. Зморович, О границах выпуклости звездных функций порядка α в круге $|z| < 1$ и круговой области $0 < |z| < 1$. Матем. сб., нов. сер., т. 68 (110), № 4, 1965.
3. В. А. Зморович, Про деякі теореми теорії екстремальних оцінок в спеціальних класах аналітичних функцій, ДАН УРСР, № 8, 1965.

Надійшла 27.II 1969 р.,
після переробки — 16.VI 1971 р.
Київський політехнічний інститут