УДК 517.94

Про формули обернення основного інтегрального зображення y^k-аналітичних функцій в полярних координатах

Н. О. Пахарєва, М. М. Бєлова

У цій роботі будуються формули обернення основного інтегрального зображення y^k-аналітичних функцій, відмінні від раніш відомих [1].

1. Нехай D — півкруг у верхній півплощині $z = x + iy = re^{i\varphi}$, обмежений дугою кола $z = \rho e^{i\varphi} (0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ і відрізком C дійсної осі $[-\rho; \rho]$; $\omega(z)$ — довільна аналітична в області D функція, уявна частина якої на C дорівнює нулю. $k > 0$. Тоді функція $\widetilde{f}(z)$, визначена рівністю

$$\widetilde{f}(z) = \widetilde{u}(x, y) + i\widetilde{v}(x, y) = \frac{C_k}{(iy)^{k-1}} \int\limits_{\overline{z}}^{z} \omega(\tau) [(\tau - \overline{z})(z - \tau)]^{\frac{k-2}{2}} d\tau +$$

$$+ i \frac{C_k}{i^{k+1}} \int\limits_{\overline{z}}^{z} \omega(\tau) [(\tau - \overline{z})(z - \tau)]^{\frac{k-2}{2}} \left(\tau - \frac{z + \overline{z}}{2}\right) d\tau, \tag{1}$$

де $C_k^{-1} = \int\limits_0^{\pi} \sin^{k-1} t dt$, буде y^k-аналітичною в області D [1]. Інтегральне зображення (1) еквівалентне рівності

$$\widetilde{f}(z) = \widetilde{u}(x, y) + i\widetilde{v}(x, y) = \frac{C_k}{(iy)^{k-1}} \int\limits_{\overline{z}}^{z} \omega(\tau) [(\tau - \overline{z})(z - \tau)]^{\frac{k-2}{2}} d\tau +$$

$$+ i \frac{C_k}{ki^{k+1}} \int\limits_{\overline{z}}^{z} \frac{d\omega(\tau)}{d\tau} [(\tau - \overline{z})(z - \tau)]^{\frac{k}{2}} d\tau \tag{1'}$$

при умові, що $\arg[(\tau - \overline{z})(z - \tau)]$ на C дорівнює нулю.

Теорема 1. *В області D справедливі такі формули обернення інтегрального зображення* (1):

$$\omega(z) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^2}{2^{1-k} \pi \Gamma(k)} \int\limits_0^{\pi} \widetilde{\widetilde{u}}(r_1, \vartheta) \frac{\frac{k}{2}\left(1 - \frac{z^2}{r_1^2}\right) \sin^k \vartheta d\vartheta}{\left[1 - 2\frac{z}{r_1} \cos\vartheta + \frac{z^2}{r_1^2}\right]^{\frac{k}{2}+1}}, \tag{2}$$

$$\omega'(z) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^2 k}{2^{1-k} \pi \Gamma(k) r_1^{k+1}} \int\limits_0^{\pi} \widetilde{\widetilde{v}}(r_1, \vartheta) \frac{\left(\frac{k}{2} + 1\right)\left(1 - \frac{z^2}{r_1^2}\right) \sin\vartheta d\vartheta}{\left[1 - 2\frac{z}{r_1}\cos\vartheta + \frac{z^2}{r_1^2}\right]^{\frac{k}{2}+2}} \tag{3}$$

для будь-якого фіксованого значення $r_1 < \rho$, $|z| < r_1$, *де* $\widetilde{\widetilde{u}}(r_1, \vartheta) = \widetilde{u}(r_1 \cos\vartheta;$ $r_1 \sin\vartheta)$, $\widetilde{\widetilde{v}}(r_1, \vartheta) = \widetilde{v}(r_1 \cos\vartheta, r_1 \sin\vartheta)$.

Доведення. Доведемо спочатку справедливість формули (2). Як відомо, аналітична в області D функція $\omega(z_1)$ може бути зображена у вигляді рівномірно збіжного ряду

$$\omega(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z_1^n. \tag{4}$$

Підставляючи (4) в (1), змінюючи порядок інтегрування і сумування, знаходимо розвинення в рівномірно збіжний ряд функції $\widetilde{u}(x_1, y_1)$ вигляду

$$\widetilde{u}(x_1, y_1) = C_k (iy_1)^{1-k} \sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_{\bar{z}_1}^{z_1} \tau^n [(\tau - \bar{z}_1)(z_1 - \tau)]^{\frac{k-2}{2}} d\tau.$$

Переходячи в останньому виразі до нової змінної інтегрування t: $\tau = x_1 + iy_1 \cos t$, і використовуючи інтегральне зображення многочленів Гегенбауера $C_n^{\alpha}(x)$ [2], одержимо

$$\widetilde{u}(x_1, y_1) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{(k)_n} (x_1^2 + y_1^2) C_n^{\frac{k}{2}} \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} \right)$$

або

$$\widetilde{\widetilde{u}}(r_1, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{(k)_n} r_1^n C_n^{\frac{k}{2}} (\cos\vartheta). \tag{5}$$

Для знаходження коефіцієнтів b_n розвинення функції $\omega(z_1)$ (4), скористаємось ортогональністю многочленів Гегенбауера на проміжку $[0, \pi]$. Домножаючи обидві частини рівності (5) на $C_m^{\frac{k}{2}}(\cos\vartheta)\sin^k\vartheta$ та інтегруючи по ϑ від 0 до π, одержимо

$$\int_0^{\pi} \widetilde{\widetilde{u}}(r_1, \vartheta) C_m^{\frac{k}{2}}(\cos\vartheta) \sin^k \vartheta d\vartheta = b_m \frac{2^{1-k}\pi\Gamma(k) r_1^m}{\left(\frac{k}{2} + m\right)\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^2},$$

звідки

$$b_m = \frac{\left(\frac{k}{2} + m\right)\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^2}{2^{1-k}\pi\Gamma(k) r_1^m} \int_0^{\pi} \widetilde{\widetilde{u}}(r_1, \vartheta) C_m^{\frac{k}{2}}(\cos\vartheta) \sin^k \vartheta d\vartheta \quad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

З формули (4) випливає

$$\omega(z) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^2}{2^{1-k}\pi\Gamma(k)} \int_0^{\pi} \widetilde{\widetilde{u}}(r_1, \vartheta) \sin^k\vartheta \sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{k}{2}\right) \times$$

$$\times \left(\frac{z}{r_1}\right)^m C_m^{\frac{k}{2}}(\cos\vartheta) d\vartheta, \tag{7}$$

$z = re^{i\varphi}$. Враховуючи розвинення породжуючої функції для многочленів Гегенбауера

$$(1 - 2tx + t^2)^{-\alpha} = \sum_{m=0}^{\infty} t^n C_m^{\alpha}(x), \quad |t| < 1,$$

після простих обчислень знаходимо

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(m + \frac{k}{2}\right) C_m^{\frac{k}{2}}(\cos\vartheta) \left(\frac{z}{r_1}\right)^m = \frac{\frac{k}{2}\left(1 - \frac{z^2}{r_1^2}\right)}{\left[1 - 2\frac{z}{r_1}\cos\vartheta + \frac{z^2}{r_1^2}\right]^{\frac{k}{2}+1}}. \qquad (8)$$

Підставляючи (8) в (7), одержимо формулу (2).

Формулу (3) можна отримати аналогічно, скориставшись інтегральним зображенням $\widetilde{v}(x, y)$ (1′) і розвиненням в рівномірно збіжний ряд функції $\omega'(z)$ в області D.

Відзначимо одну властивість одержаних формул обернення. Легко бачити, що права частина формули (2) за значенням дійсної частини y^k-аналітичної функції на півколі $z_1 = r_1 e^{i\vartheta}$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$ відновлює аналітичну в крузі $|z| < r_1$ функцію $\omega(z)$, зв'язану з $\widetilde{u}(x, y)$ інтегральним зображенням (1). Формула обернення (3) за значенням уявної частини y^k-аналітичної функції відновлює в даному крузі похідну від функції $\omega(z)$.

2. Нехай D_1 є область у верхній півплощині $z = x + iy = re^{i\varphi}$, обмежена дугою кола $z = \rho e^{i\varphi}$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$ і відрізками дійсної осі $(-\infty, -\rho]$, $[\rho; \infty)$; $\omega_1(z)$ — аналітична в області D_1 функція, причому функція $z^k\omega_1(z)$ однозначна в D_1, обмежена при підході до нескінченності й приймає на дійсній осі дійсні значення. Тоді [1], функція $\widetilde{f}(z) = \widetilde{u}(x, y) + i\widetilde{v}(x, y)$, визначена рівностями (1) і (1′), буде y^k-аналітичною в D_1 при умові, що на дійсній осі $\arg[(\tau - \overline{z})(z - \tau)] = 0$.

Т е о р е м а 2. *В області D_1 справедливі такі формули обернення інтегрального зображення* (1):

$$\omega_1(z) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^2}{2^{1-k}\pi\Gamma(k)} \left(\frac{r_1}{z}\right)^k \int_0^{\pi} \widetilde{\widetilde{u}}(r_1, \vartheta) \frac{\frac{k}{2}\left(1 - \frac{r_1^2}{z^2}\right)\sin^k\vartheta\, d\vartheta}{\left[1 - 2\frac{r_1}{z}\cos\vartheta + \frac{r_1^2}{z^2}\right]^{\frac{k}{2}+1}}, \qquad (9)$$

$$\omega_1'(z) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^2 k}{2^{1-k}\pi\Gamma(k)\, r_1^{k+1}} \left(\frac{r_1}{z}\right)^{k+1} \int_0^{\pi} \widetilde{\widetilde{v}}(r_1, \vartheta) \frac{\left(\frac{k}{2} + 1\right)\left(1 - \frac{r_1^2}{z^2}\right)\sin\vartheta\, d\vartheta}{\left[1 - 2\frac{r_1}{z}\cos\vartheta + \frac{r_1^2}{z^2}\right]^{\frac{k}{2}+2}} \qquad (10)$$

для будь-якого фіксованого значення $r_1 > \rho$, $|z| > r_1$.

Д о в е д е н н я. Функція $z_1^k\omega_1(z_1)$ в області D_1 може бути зображена рядом

$$z_1^k\omega_1(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z_1^{-n}. \qquad (11)$$

Підставляючи (11) в (1), одержуємо таке розвинення функції $\widetilde{u}(x_1, y_1)$:

$$\widetilde{u}(x_1, y_1) = \frac{C_k}{(iy)^{k-1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\bar{z}_1}^{z_1} \tau^{-(n+k)} [(\tau - \bar{z}_1)(z_1 - \tau)]^{\frac{k-2}{2}} d\tau =$$

$$= \frac{C_k}{(iy_1)^{k-1}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(- \int_{\frac{1}{\bar{z}_1}}^{\frac{1}{z_1}} \alpha^n [(1 - \alpha\bar{z}_1)(\alpha z_1 - 1)]^{\frac{k-2}{2}} d\alpha \right). \qquad (12)$$

Переходячи в останньому виразі до нової змінної інтегрування t: $\alpha = \frac{1}{r}\cos\vartheta + i\frac{1}{r}\sin\vartheta\cos t$ і використовуючи інтегральне зображення многочленів Гегенбауера, знайдемо

$$\widetilde{\widetilde{u}}(r_1, \vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{(k)_n} r_1^{-(n+k)} C_n^{\frac{k}{2}}(\cos\vartheta), \qquad (13)$$

звідки, завдяки властивості ортогональності многочленів Гегенбауера, визначимо коефіцієнти

$$a_m = \frac{\left(\frac{k}{2} + m\right)\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^2}{2^{1-k}\pi\Gamma(k)\, r_1^{-(m+k)}} \int_0^{\pi} \widetilde{\widetilde{u}}(r_1, \vartheta)\, C_m^{\frac{k}{2}}(\cos\vartheta) \sin^k\vartheta\, d\vartheta. \qquad (14)$$

Згідно з формулою (11) за коефіцієнтами a_m відновлюємо функцію

$$\omega_1(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{-(m+k)} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^2}{2^{1-k}\pi\Gamma(k)} \int_0^{\pi} \widetilde{\widetilde{u}}(r_1, \vartheta) \times$$

$$\times \sin^k\vartheta \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{k}{2} + m\right) C_m^{\frac{k}{2}}(\cos\vartheta) \left(\frac{z}{r_1}\right)^{-(m+k)} d\vartheta =$$

$$= \frac{\left[\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^2}{2^{1-k}\pi\Gamma(k)} \int_0^{\pi} \widetilde{\widetilde{u}}(r_1, \vartheta) \sin^k\vartheta \frac{\frac{k}{2}\left(1 - \frac{r_1^2}{z^2}\right)\left(\frac{r_1}{z}\right)^k d\vartheta}{\left[1 - 2\frac{r_1}{z}\cos\vartheta + \frac{r_1^2}{z^2}\right]^{\frac{k}{2}+1}}.$$

Формулу (10) можна отримати аналогічно, якщо використати інтегральне зображення $\widetilde{v}(x, y)$ за допомогою формули (1′) і розвинення функції $\omega_1'(z)$ в області D_1 в рівномірно збіжний ряд.

Формули обернення (9) і (10) за значеннями дійсної, відповідно уявної, частини y^k-аналітичної функції на півколі $z_1 = r_1 e^{i\vartheta}$ $(0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi)$ відновлюють аналітичну в області $|z| > r_1$ функцію $\omega_1(z)$, відповідно $\omega_1'(z)$, зв'язані з y^k-аналітичною функцією інтегральним зображенням (1).

Зазначені вище властивості формул обернення (2), (3), (9) і (10) вказують на можливість ефективного використання їх для розв'язку крайових задач y^k-аналітичних функцій.

ЛІТЕРАТУРА

1. Г. Н. Положий, Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного, Изд-во КГУ, К., 1965.
2. Г. Бейтмен, Л. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 2, «Наука», М., 1966.

Надійшла 28.X 1971 р.
Київський державний університет