УДК 513.882

Бiпозитивнi проектори в частково впорядкованому просторi

В. С. Тен

Векторний простір E, частково впорядкований за допомогою лінійної напівгрупи K такої, що $K \cap (-K) = \{0\}$, $E = K - K$, коротко надалі будемо називати простором (E, K). Через $P = P(E, K)$ позначимо клас лінійних гомоморфізмів $p : E \to E$ таких, що $p^2 = p$, $p : K \to K$; $p' = I - p : K \to K$. Елементи класу $P(E, K)$ будемо називати бiпозитивними проекторами.

Вивчення позитивного спектра додатного оператора [1, 2] в загальному випадку, коли останній не є нерозкладним, деколи істотно полегшується, якщо оператор попередньо піддати квазітрикутному розкладу за допомогою бiпозитивних проекторів. Ця обставина і послужила основною причиною виділення класу P. Далі вияснилось, що багато властивостей цього класу не зв'язано з топологією простору (E, K) і носить алгебраїчний характер. Тому для початку ми обмежились випадком, коли простір (E, K) просто векторний, а не нормований. В цій замітці доводиться перша основна властивість класу бiпозитивних проекторів (P — булева алгебра).

З а у в а ж е н н я 1. 1) Простір (E, K) не називаємо напівупорядкованим, щоб запобігти плутанини, бо під цим терміном часто розуміють векторні структури [4,5].

2) В класі всіх лінійних гомоморфізмів можна ввести природне упорядкування так. Нехай $A, B \in \mathrm{Hom}(E, E)$, будемо враховувати, що $A \geqslant B$ в тому і тільки в тому випадку, якщо $A - B : K \to K$. Із того, що $K \cap (-K) = \{0\}$ випливає, що якщо $A \leqslant B$ і $A \geqslant B$, то $A = B$.

Д о п о м і ж н і т в е р д ж е н н я. Нехай (E, K) — частково впорядкований простір, $P = P(E, K)$ — бiпозитивні проектори.

1. Нехай $p \in P$; $x, y \in K$. Тоді

а) $x \geqslant px$;

б) якщо $px \geqslant y$, то $py = y$.

2. Нехай $p, q \in P$. Тоді

а) якщо $pq = qp$, то $pq \in P$;

б) умова $q = pq$ еквівалентна нерівності $q \leqslant p$;

в) якщо $p \geqslant q$, то $pq = qp$.

Доведемо тільки твердження 2, в). Нехай $q \leqslant p$, тоді згідно з твердженням 2, б), $q = pq$. Нехай далі $s = qp$. Маємо

$$sq = (qp)\,q = q\,(pq) = q^2 = q;$$

отже, $s - q = s - sq = sq'$. Оператор s як добуток двох позитивних проекторів додатний, тому і $s - q = sq' \geqslant 0$ або $s \geqslant q$. Далі

$$q = q\,(p + p') = qp + qp' = s + qp',$$

отже, $q \geqslant s \geqslant q$ і тому $s = q$.

Теорема. *Клас бiпозитивних проекторiв* $P(E, K)$ *простору* (E, K) *є булевою алгеброю при природному упорядкуванні. Причому якщо* $p, q, r \in P(E, K)$, *то*

а) $p \wedge q = pq = qp \in P$ *і* $p \wedge p' = 0$;

б) $p \vee q = p + q - pq \in P$ *і* $p \vee p' = I$;

в) $(p \vee q) \wedge r = (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$.

Спочатку введемо одне поняття. Нехай E_0 — лінійний підпростір простору E, $K_0 = E_0 \cap K$. Якщо

а) $E_0 = K_0 - K_0$;

б) для довільного вектора $u \in K_0$ має місце включення

$$\{z \in K \mid z \leqslant u\} \subset K_0;$$

в) $\sup x_\xi \in E_0$, якщо $x_\xi \in E_0$, і існує $\sup x_\xi \in E$, то в цьому випадку простір (E_0, K_0) називають компонентою простору (E, K) [4, 5].

Тепер сформулюємо одне твердження, яке викликає і самостійний інтерес.

Лема. *Нехай* $p, q \in P(E, K)$. *Тоді простір* (pqE, pqK) *є компонентою простору* (E, K). *Причому*

$$pqE = qpE = \{x \in E \mid x = px = qx\}. \tag{$*$}$$

Доведення теореми. Нехай $r = pq$, $s = qp$. Доведемо, що $r = s$. Згідно з лемою $rE = sE$. Тому, якщо $x \in E$, то $rx \in sE$, отже, згідно з $(*)$

$$s(rx) = qp(rx) = q(rx) = rx,$$

тобто $sr = r$ і

$$s - r = s - sr = s(I - r).$$

Але

$$I - r = I - pq = I - p + p - pq = p' + pq' \geqslant 0.$$

Таким чином,

$$s - r = s(I - r) = s(p' + pq') \geqslant 0,$$

або $s \geqslant r$. Аналогічно із умови $sx \in rE$, доведемо, що $r \geqslant s$. Отже, $s = r$ і згідно з твердженням 2, а) $pq = qp \in P$.

Покажемо, що $p \wedge q = pq$. Дійсно, нехай $m \in P$ і $m \leqslant p, q$. Тоді $m \leqslant q$ і $pm \leqslant pq$. Але оскільки $m \leqslant p$, то згідно з твердженням 2, б) $m = pm \leqslant pq = qp = r$. З другого боку,

$$pr = p(pq) = p^2 q = pq = r, \quad qr = q(qp) = r.$$

Тому, згідно з твердженням 2, б), $r \leqslant p, q$ і значить $p \wedge q = pq$.

Покажемо, що $t = p + q - pq = p \vee q$. Маємо

$$t = p + q - pq = p + p'q = q + pq',$$

отже, $t \geqslant p, q$. Далі

$$t^2 = (p + p'q)(p + p'q) = p^2 + p'qp + pp'q + p'qp'q = p + p'q = t.$$

Тут використали перестановочність бiпозитивних проекторів і той факт, що $pp' = 0$. Оскільки $t' = I - t = I - p - p'q = p' - p'q = p'q' \geqslant 0$, то доведено, що t — бiпозитивний проектор і $t \geqslant p, q$.

Нехай тепер $m \in P$ і $m \geqslant p, q$, тоді згідно з твердженням 2, б), в) справедливі рівності $mp = p$, $mq = q$. Таким чином,

$$mt = mp + mqp' = p + qp' = t,$$

отже, $t \leqslant m$ і тому $t = p \vee q$.

Твердження в) є безпосереднім наслідком а) і б). Таким чином, теорему доведено повністю.

Зауваження 2. Бiпозитивні проектори з'являються при вивченні K_σ-просторів [4,5]. При цьому, однак, їх алгебраїчні властивості залишаються осторонь і всі пропозиції, які зв'язані з P, виводяться з умовної σ-повноти лінійної структури. В K-лінеалах, які не є K_σ-простором, біпозитивні проектори не розглядались. Разом з цим за допомогою теореми Стоуна [6] для довільної наперед заданої булевої алгебри Σ легко побудувати простір (E, K), який не є K_σ-простором і у якого клас $P\ (E, K)$ був би ізоморфним Σ.

ЛІТЕРАТУРА

1. М. Г. Крейн, М. А. Рутман, Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН, т. 3, вып. 1(23), 1948.
2. М. А. Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, М., 1962.
3. В. С. Тен, Запровадження класу p-нерозкладних додатних операторів в просторі Банаха, УМЖ, т. 21, № 2, 1969.
4. А. В. Канторович, Б. З. Вулих, А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, М., 1950.
5. Б. З. Вулих, Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М., 1961.
6. M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean vings to general topology. Trans. A. M. S., **41**, 1937, 375—481.

Надійшла 27.I 1971 р.

Інститут прикладної математики і механіки АН УРСР