УДК 519.50+519.54

Дискретні топологічні простори

Д. В. Чудновський

У праці вивчається властивість $S_1(m, n, k) \rightleftarrows X_m \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} X_k^n$, де m, n, k — нескінченні кардинальні числа. Це продовжує дослідження, початі в [1 — 3].

Розглядається задача про значення $\mathrm{Exp}_{X_k} X_m$ (див. [1]) і подібні питання про топологічні властивості тихоновських добутків дискретних просторів. Наводиться теоретико-множинна характеристика властивості $S_1(m, n, k)$ і у припущенні узагальненої континуум гіпотези дається повний опис функції $f(m) = \mathrm{Exp}_N X_m$. Одержані результати відповідають на питання Мрувки [1] і Енгелькінга [4].

Використані означення та поняття теорії множин і загальної топології наведені в [1, 5, 6].

Властивість $S_1(m, n, k) \rightleftarrows X_m \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} X_k^n$ означає, що X_m гомеоморфний замкненій підмножині тихоновського степеня X_k^n, де X_m — дискретний простір потужності m. Властивість $S_1(m, n, k)$ у випадку $k = \omega$ в [1] позначалась через $S(m, n)$.

Покладемо $\mathrm{Exp}_{X_k} X_m = \inf \{n : X_m \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} X_k^n\}$, а якщо $S_1(m, n, k)$ не має місця для кожного n, то покладемо $\mathrm{Exp}_{X_k} X_m = \infty$.

Спочатку розглянемо питання про те, коли існує $\mathrm{Exp}_{X_k} X_m < \infty$ тобто, коли $X_m \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} X_k^n$ для деякого n. У випадку $k = \omega$, $X_\omega = N$ умова існування $\mathrm{Exp}_N X_m$ наводиться у [1] $(m > \omega)$: $m \in U = \{m : [\omega_1, m] \subseteq C_1\}$, тобто m невимірний за Уламом. За допомогою результатів [5] подібну характеристику можливо дати й для $\mathrm{Exp}_{X_k} X_m$.

Теорема 1. *Існує* $\mathrm{Exp}_{X_k} X_m < \infty$ *тоді й лише тоді, коли* $[k^+, m] \subseteq C_1$, *або* $m \leqslant k$.

Доведення. Доведення того, що з $[k^+, m] \subseteq C_1$ випливає $X_m \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} X_k^n$, для деякого n (зауважимо, що n може бути вибране $\leqslant 2^m$) аналогічне доведенню теореми 2.30 з [5].

Нагадаємо, що згідно з [5] умова $[\alpha, \beta] \subseteq C_1$ означає, що на множині β кожний α-повний примарний — головний. Якщо $[k^+, m] \not\subseteq C_1$, то на m існує k^+-повний неголовний примарний ідеал I. Покажемо, що кожна множина A потужності m в X_k^n має точку нагромадження для кожного $n \geqslant \omega$. Нехай $\{t_\xi : \xi < m\}$ — нумерація елементів A. Тоді для кожного $\zeta < n$ існує тільки одна точка $p \in X_k$ така, що

$$\{\eta < m : t_\eta(\zeta) = p\} \not\in I, \qquad (1)$$

оскільки $\bigcup_{p \in X_k} \{\eta < m : t_\eta(\zeta) = p\} = m \not\in I$.

Розглянемо таку точку u в X_k^n, що для $\zeta < n$ $u(\zeta)$ — єдина точка $p \in X_k$ така, що (1) виконується. Оскільки I — неголовний та примарний, то для кожного $x \in S_\omega(n)$ множина $\{\eta < m : t_\eta(\zeta) = u(\zeta)$ для всіх $\zeta \in x\}$ нескінченна. Тому u — точка нагромадження A і $X_m \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} X_k^n$ ні для якого $n \geqslant \omega$. Теорему доведено.

Згідно з (1.1) [1] якщо $X_m \underset{\mathrm{Cl}}{\subset} X_k^n$ для деякого n, то $\mathrm{Exp}_{X_k} X_m \leqslant 2^m$. Тому з теореми 1 одержуємо такий наслідок.

Наслідок 1. *Такі умови еквівалентні:*

1) $\mathrm{Exp}_{X_k} X_m < \infty$;

2) $\mathrm{Exp}_{X_k} X_m \leqslant 2^m$;

3) $[k^+, m] \subseteq C_1$ або $k \geqslant m$.

Наведемо теоретико-множинну характеристику властивості $S_1(m, n, k)$. У випадку $k = \omega$ ця характеристика анонсується в [1].

Твердження 1. Такі умови еквівалентні при $n \geqslant k$:

1) $S_1(m, n, k)$;

2) $S_2(m, n, k)$: існує таке сімейство $\{A_\eta^{(\xi)} : \eta < k\}$, $\xi < n$, підмножин X_m, що $\bigcup_{\eta < k} A_\eta^{(\xi)} = X_m$ при $\xi < n$ і для будь-яких $\eta_\xi : \xi < n$, існують $\xi_1, \ldots, \xi_l < n$ такі, що $\bigcap_{i \leqslant l} A_{\eta_{\xi_i}}^{(\xi_i)}$ — скінченне.

Доведення твердження 1 проводиться, безпосередньо виходячи з означення в просторі X_k^n. При цьому використовується той факт, що сімейство $\{A_\eta^{(\xi)} : \eta < k\}$, яке задовольняє $S_2(m, n, k)$ при $n \geqslant k$, може бути перетворено в сімейство $\{B_\eta^{(\xi)} : \eta < k\}$, що також задовольняє $S_2(m, n, k)$, але таке, що $\bigcap_{i \leqslant l} B_{\eta_{\xi_i}}^{(\xi_i)}$ має не більше одного елемента.

Твердження 2. Такі умови еквівалентні:

1) $S_2(m, n, k)$;

2) $S_3(m, n, k)$: існує таке сімейство $\{A_\eta^{(\xi)} : \eta < k\}$, $\xi < n$, підмножин X_m, що $\bigcup_{\eta < k} A_\eta^{(\xi)} = X_m$ для $\xi < n$ і для кожного неголовного ультрафільтра D на X_m, $A_\eta^{(\xi)} \not\in D$ при $\eta < k$ для деякого $\xi < n$.

Доведення. Припустимо, що виконується 1), тобто існує сімейство $\{A_\eta^{(\xi)} : \eta < k\}$, $\xi < n$, що задовольняє $S_2(m, n, k)$. Якщо існує такий неголовний ультрафільтр D на X_m, що $A_{\eta_\xi}^{(\xi)} \in D$ для $\eta_\xi < k$, $\xi < n$, то

$\bigcap_{i\leqslant l} A^{(\xi_i)}_{\eta_{\xi_i}} \in D$ і $\bigcap_{i\leqslant l} A^{(\xi_i)}_{\eta_{\xi_i}}$ — нескінченне. Отже, сімейство $\{A^{(\xi)}_\eta : \eta < k\}$, $\xi < n$, яке задовольняє $S_2(m, n, k)$, задовольняє і $S_3(m, n, k)$ і з 1) випливає 2).

Нехай $\{A^{(\xi)}_\eta : \eta < k\}$, $\xi < n$, задовольняє $S_3(m, n, k)$, але для $\eta_\xi < k$ при $\xi < n$, $S_2(m, n, k)$ не виконується. Тоді система $\{A^{(\xi)}_{\eta_\xi} : \xi < n\}$ центрирована і розширяється до неголовного ультрафільтра D, тобто $A^{(\xi)}_{\eta_\xi} \in D$ при $\xi < n$, що суперечить $S_3(m, n, k)$. Отже, із 2) випливає 1).

Наслідок 2. *Умови $S_1(m, n, k)$, $S_2(m, n, k)$ і $S_3(m, n, k)$ еквівалентні між собою при $n \geqslant k$, а у випадку $n^k = n$ і умові $S_4(m, n, k)$: існує $\mathfrak{N} \subseteq S(X_m)$, $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} \leqslant n$, таке, що для кожного неголовного ультрафільтра D на X_m і деякого $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$, $\overline{\overline{\mathfrak{M}}} \leqslant k$; $\mathfrak{M} \cap D = \varnothing$ і $\bigcup \mathfrak{M} \in D$.*

За допомогою цієї теоретико-множинної харектеристики $S_1(m, n, k)$ можна дослідити багато його властивостей.

Наприклад, виконується така теорема.

Теорема 2. *Якщо $\alpha \geqslant \omega$, то має місце $S_1(2^\alpha, 2^\alpha, \alpha)$, тобто $X_{2^\alpha} \underset{Cl}{\subset} X_\alpha^{2^\alpha}$.*

Цей результат дає відповідь на питання Енгелькінга [4]*.

Доведення. Тому що $(2^\alpha)^\alpha = 2^\alpha$, то згідно з наслідком 2 досить показати $S_4(2^\alpha, 2^\alpha, \alpha)$. Нехай $A = \{1, -1\}^\alpha$, а при $\xi < \alpha$ $A_\xi = \{f \in A : f(\xi) = 1\}$. Покладемо $(+1) A_\xi = A_\xi$, $(-1) A_\xi = A \setminus A_\xi$ і $\mathfrak{N} = \{f(\xi) \cdot A_\xi : \xi < \alpha,\ f \in A\}$. Тоді, очевидно, $\overline{\overline{\mathfrak{N}}} \leqslant 2^\alpha$. Нехай D — неголовний ультрафільтр над A, $\overline{\overline{A}} = 2^\alpha$. Покладемо

$$f_0(\xi) = \begin{cases} 1, & \text{при } A_\xi \in D, \\ -1, & \text{при } A_\xi \notin D. \end{cases}$$

Тоді $f_0(\xi) A_\xi \in D$ і $-f_0(\xi) \cdot A_\xi \notin D$. Маємо $\bigcup_{\xi<\alpha} -f_0(\xi) A_\xi = -\bigcap_{\xi<\alpha} f_0(\xi) A_\xi$, але $\bigcap_{\xi<\alpha} f_0(\xi) A_\xi = \{f_0\} \notin D$. Тому $\bigcup_{\xi<\alpha} -f_0(\xi) A_\xi \in D$ і властивість $S_4(2^\alpha, 2^\alpha, \alpha)$ доведено.

Доведення теореми 2 використовує, власне кажучи, аргументи, подібні до тих, які використовуються у класичному доведенні невимірності 2^α (тобто того, що $2^\alpha \in C_1$).

За допомогою наслідку 2 можна довести також замкненість класу $M_k = \{m : S_1(m, m, k)\}$ щодо звичайних операцій з нескінченними кардиналами; якщо $m \in M_k$, то $m^+ \in M_k$ і т. п.

На закінчення відзначимо, що одержаний наслідок 1 і результати роботи [2] при узагальненій континуум-гіпотезі дають повний опис функції $f(m) = \mathrm{Exp}_N X_m$ в термінах класів C_0 і $U = \{m : [\omega_1, m] \subseteq C_1\}$.

Згідно з [2] при узагальненій континуум-гіпотезі $M_\omega = M = C_0 \cap U$. Тому з наслідку 1 випливає, що

$$f(m) = \mathrm{Exp}_N X_m = \begin{cases} \infty, & \text{при } m \notin U, \\ m^+, & \text{при } m \in U \setminus C_0, \\ m, & \text{при } m \in U \cap C_0. \end{cases}$$

Подібний вираз можна одержати для $\mathrm{Exp}_{X_k} X_m$.

---

* Теорема 6 була одержана автором у кінці 1968 р. (див. [3]). Цей же результат довів Юхаш (Bull. Acad. Polon. Sci., 1969, № 4) іншим чином.

ЛІТЕРАТУРА

1. S. Mrovka, On E-compact spaces, Bull. Acad. Polon. Sci., v. 14, 1966, N 11, 597—605.
2. Д. В. Чудновский, О N-компактности и свойствах измеримости, УМЖ, т. 24, № 1, 1972.
3. Д. В. Чудновський, E-компактність в дискретних просторах, V Наук. конф. молодих матем. України, К., 1970.
4. R. Engelking, On the Double Circumference of Alexandroff. Bull. Acad. Polon. Sci, v. 16, 1968, N 8, 629—634.
5. H. J. Keisler, A. Tarski, From accessible to inoccessible cardinals, Fund. Math., v. 53, 1964, N 3, 225—308.
6. К. Куратовский, Топология, т. I, «Мир», М., 1966.

Надійшла 31.VII 1970 р.

Інститут механіки АН УРСР