УДК 519.45

Про нескінченні періодичні *M*-групи

В. І. Юрченко

Група G називається M-групою, якщо різні класи спряжених елементів її породжують різні нормальні дільники.

В роботі [1] за допомогою теорії зображень скінченних груп доведено, що скінченна M-група є розширенням силовської 3-групи за допомогою 2-групи.

Автор замітки одержав цей результат звичайними методами абстрактної теорії груп [4].

В даній роботі цей результат переноситься на нескінченні періодичні M-групи, які є розширенням абелевої групи за допомогою скінченної групи.

Наведемо деякі позначення: $< a >$ — нормальний дільник, який породжується елементом b, C_a— клас спряжених з a елементів, $|H|$ — порядок підгрупи H, $\varphi(m)$ — функція Ейлера.

Теорема 1. *Періодична М-група містить інволюції.*

Доведення. Нехай $p_1 < p_2 < p_3 < \ldots < p_n < \ldots$ всі прості числа з $\pi(G)$. З визначення M-групи випливає, що всі степені елемента $g \in G$, $|g| = p_1$, $g, g^2, \ldots, g^{p_1-1}$ спряжені. Тому для деякого $u \in G$ маємо $u^{-1}gu = g^k$, $k^m \equiv (\mathrm{mod}\, p_1)$, де $m = |u|$. За теоремою Ферма, $k^{p_1-1} \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p_1)$, крім того, $k^z \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p_1)$, де z — показник, до якого належить k за модулем p_1. З викладеного вище випливає, що m і $p_1 - 1$ діляться на z. Зважаючи, що $(u^{\frac{m}{z}})^z = 1$, маємо $p_1 = 2$.

Наслідок 1. *Періодична проста М-група є скінченною другого порядку.*

Лема. *Фактор-група довільної М-групи G щодо мінімального нормального дільника є М-групою.*

Доведення. Позначимо через N мінімальний нормальний дільник групи G. Нехай

$$G = N + Nt_2 + Nt_3 + \ldots$$

розклад G по N. Очевидно, що $\langle Nt_i \rangle = N \cdot \langle t_i \rangle$. Припустимо, що для деяких i, j $\langle Nt_i \rangle = \langle Nt_j \rangle$, тобто

$$N \langle t_j \rangle = N \cdot \langle t_i \rangle.$$

Тоді $t_j = at_i$, $a \in N$, $\langle t_j \rangle = \langle at'_i \rangle = N \cdot \langle t'_i \rangle$. Якщо t'_i не спряжений з t_i, то

$$\langle t'_i \rangle \subset \langle t_i \rangle, \qquad \langle t_j \rangle = N \cdot \langle t'_i \rangle \subset N \langle t_i \rangle,$$

тобто $N\langle t_i \rangle \neq N \langle t_j \rangle$.

З цієї суперечності випливає, що $t'_i \backsim t_i$, але тоді $Nt_j \backsim Nt_i$.

Наслідок 2. *Фактор-група M-групи G щодо нормального дільника, який є об'єднанням зростаючого інваріантного ряду, що не допускає ущільнення нормальними дільниками групи G, є M-групою.*

На протязі всього подальшого викладу M-група G є скінченним розширенням абелевої групи N за допомогою скінченної групи H.

Теорема 2. *Якщо M-група G є скінченним розширенням абелевої групи N за допомогою скінченної групи H, то* $\pi(G) = \{2, 3\}$, $\pi(N) = \{3\}$.

Доведення. Насамперед зауважимо, що для кожного $p \in \pi(N)$ група N містить мінімальний нормальний дільник групи G, який є скінченною елементарною абелевою p-групою. Згідно з лемою можна вважати, що всі мінімальні нормальні дільники групи G містяться в N. Будь-який нормальний дільник групи G є об'єднанням зростаючого інваріантного ряду групи G без ущільнень. Тому згідно з наслідком 2 будь-яка фактор-група групи G є M-групою.

Нехай $p \in \pi(N)$, N_0 — мінімальний нормальний дільник групи G, $|N_0| = p^\gamma$. Факторизуючи групу G щодо максимального нормального дільника, взаємнопростого з N_0, одержимо M-групу $\overline{G}$ з єдиним мінімальним нормальним дільником $\overline{N_0}$, ізоморфним N_0, $\overline{G}$ — розширення групи $\overline{N}$ за допомогою H.

Для всіх елементів $a \in \overline{G}$, $n \in \overline{N}$ маємо $an \backsim a$. Це випливає з визначення M-групи і єдиності мінімального нормального дільника. Тому $\overline{N}$ — примарна абелева група по числу p.

Порядки всіх елементів групи $\overline{G}$ обмежені в сукупності.

Дійсно, якщо $a \in \overline{N}$, $|a| = p^r$, то $\varphi(p^r) = p^r\left(1 - \dfrac{1}{p}\right) \leqslant |C_a| = h_1$, де h_1 — дільник порядку групи H. Тому $p^r \leqslant \dfrac{h_1 p}{p-1} \leqslant \dfrac{hp}{p-1}$, $h = |H|$. Для всіх елементів $a \in \overline{N}$. Звідси за першою теоремою Прюфера [2] група $\overline{N}$ розкладається в прямий добуток циклічних підгруп. Якби цей добуток був нескінченним, то цоколь групи $\overline{N}$ також був би нескінченним. Але тоді на підставі наслідку 6.1 з [3] цоколь групи $\overline{G}$ був би нескінченним. Отже, $\overline{G}$ — скінченна M-група, і тому $p = 2$ або $p = 3$. Оскільки $\overline{N_0} \setminus 1$ — клас спряжених елементів, $|\overline{N_0}| = p^\gamma$, $|H| = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, маємо $p^\gamma - 1 = 2^\alpha \cdot 3^\beta$, $\alpha \neq 0$, тобто $p = 3$. Через те що p довільне число з $\pi(N)$, то теорему 2 доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Э. М. Жмудь, О конечных группах с однозначно порождаемыми нормальными делителями, Матем. сб. 72 (114):1, 1967.
2. А. Г. Курош, Теория групп, «Наука», М., 1967.
3. С. Н. Черников, Условия конечности в общей теории групп, УМН, т. 14, № 5 (89), 1959.
4. В. І. Юрченко, Про один клас скінченних груп, ДАН УРСР, сер. А, № 6, 1972.

Надійшла 26.VI 1971 р.

Харківський інститут громадського харчування