УДК 517.945.72

Вкорочення зчисленної системи диференціальних рівнянь в частинних похідних

Г. П. Хома, В. Т. Яцюк

Вкороченням зчисленних систем диференціальних рівнянь займалось багато математиків [1—7]. В цій замітці розглядається вкорочення зчисленних систем диференціальних рівнянь в частинних похідних, використовуючи при цьому метод роботи [8].

Розглянемо зчисленну систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial u_s}{\partial t} + \lambda_s(x, t)\frac{\partial u_s}{\partial x} = f_s(x, t, u_1, u_2, \ldots)\ (s = 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

з початковими умовами

$$u_s(x, 0) = g_s(x)\ \ (s = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Характеристичні криві визначаються звичайними диференціальними рівняннями

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_s(x, t)\,(s = 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

і характеристики L_s, які виходять з точки P з координатами (x_0, t_0), можуть бути зображені за допомогою функцій

$$L_s : x = x_s(t;\ x_0, t_0)\,(s = 1, 2. \ldots).$$

Визначимо на площині (x, t) замкнуту область G_T таку, що всі характеристики L_s, проведені з точки P в область G_T у напрямку $t = 0$, перетинають заданий відрізок $[a, b]$ осі x в точках P_s з координатами

$$x = x_s(0;\ x_0, t_0).$$

Поряд з системою (1) розглянемо таку систему диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} + \lambda_k(x, t)\frac{\partial v_k}{\partial x} = f_k(x, t, v_1, v_2, \ldots, v_n, u^0_{n+1}, u^0_{n+2}, \ldots)\,(k = 1, 2, \ldots, n), \tag{4}$$

$$v_{n+j}(x, t) \equiv u^0_{n+j}(x, t)\,(j = 1, 2, \ldots)$$

з початковими умовами

$$v_k(x, 0) = g_k(x)\,(k = 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

де

$$u^0_{n+j}(x, t) = g_{n+j}(x_{n+j}(0;\ x, t))\,(j = 1, 2, \ldots).$$

Систему (4) назвемо вкороченою системою диференціальних рівнянь для системи (1). Вона одержується з системи рівнянь (1), коли в ній покласти рівними початковим умовам всі невідомі функції, починаючи з $(n+1)$-ї, і кладучи замість x рівняння характеристик при $t=0$.

Розгляд системи (1) будемо вести в просторі C^{∞}, точкою якого є зчисленна сукупність неперервних функцій, рівномірно обмежених деякою константою. Таким чином, вектор-функції системи (1) $u=(u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots)$, $\lambda=(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots)$, $f=(f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots)$ є точками простору C^{∞}.

Норму в просторі C^{∞} можна ввести так:

$$\| u(x, t) \| = \sup_k \max_{x, t} | u_k(x, t) |,$$

і неперервність функцій будемо розуміти як неперервність за нормою.

Теорема. *Нехай виконуються умови:*

1) *функції* $f_s(x, t, u_1, u_2, \ldots)$ $(s=1, 2, \ldots)$ *визначені в області* $\Omega = G_T \times D$, *де* D*-обмежена область простору* C^{∞} *і задовольняють умови:*

а) *функції* $f_s(x, t, u_1, u_2, \ldots)$ $(s=1, 2, \ldots)$ *неперервні за сукупністю змінних* $x, t, u_1, u_2, \ldots$ *в області* Ω *і задовольняють в ній умову Ліпшиця*

$$| f_s(x, t, u_1', u_2', \ldots) - f_s(x, t, u_1'', u_2'', \ldots) | < K \Delta W \tag{6}$$

по $u_1, u_2, \ldots$ *із сталою* K, *незалежною від* (x, t). *Тут*

$$\Delta W = \sup [| u_1' - u_1'' |, \ | u_2' - u_2'' |, \ldots];$$

б) *функції* $f_s(x, t, u_1, u_2, \ldots)$ $(s=1, 2, \ldots)$ *задовольняють умову*

$$| f_s(x, t, u_1, u_2, \ldots) | < \alpha_s, \tag{7}$$

де $\alpha_s = \mathrm{const}$, *причому* $\alpha_s \to 0$ *при* $s \to \infty$;

2) *функції* $g_s(x)$, $\lambda_s(x, t)$ $(s=1, 2, \ldots)$ *неперервні. Тоді розв'язок точної системи* (1) *і розв'язок вкороченої системи* (4), *що задовольняють одні і ті ж початкові умови*

$$u_s(x, 0) = v_s(x, 0) = g_s(x) \ (s=1, 2, \ldots),$$

будуть як завгодно близькі в G_T *при достатньо великому, але скінченному* n.

Доведення. В силу єдиності розв'язку задачі Коші

$$u_s(x, t) \text{ і } v_k(x, t) \ (s=1, 2, \ldots; \ k=1, 2, \ldots, n)$$

задовольняють такі інтегральні рівняння [9, 7]:

$$u_s(x, t) = g_s(x_s(0; x, t)) + \int_0^t f_s(x_s(\tau; x, t), \tau, u_1(x_s, \tau), u_2(x_s, \tau), \ldots) d\tau$$
$$(s=1, 2, \ldots), \tag{8}$$

$$v_k(x, t) = g_k(x_k(0; x, t)) + \int_0^t f_k(x_k(\tau; x, t), \tau, v_1(x_k, \tau), \ldots, v_n(x_k, \tau),$$
$$u_{n+1}^0(x_k, \tau), u_{n+2}^0(x_k, \tau), \ldots) d\tau \qquad (k=1, 2, \ldots, n), \tag{9}$$
$$v_{n+j}(x, t) \equiv u_{n+j}^0(x, t) \qquad (j=1, 2, \ldots).$$

На основі умови (7) маємо:

$$| u_j(x, t) - u_j^0(x, t) | \to 0 \qquad \text{при } j \to \infty.$$

Значить, для будь-якого $\delta > 0$ знайдеться таке N, що при $n > N$ буде виконуватись нерівність

$$|u_{n+i}(x, t) - u_{n+i}^0(x, t)| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Очевидно, розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) можна замінити розв'язком системи інтегральних рівнянь

$$u_k(x, t) = g_k(x_k(0; x, t)) + \int_0^t f_k(x_k(\tau; x, t), \tau, u_1(x_k, \tau), \ldots, u_n(x_k, \tau),$$
$$u_{n+1}(x_k, \tau), \ldots)\, d\tau \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

і

$$u_{n+i}(x, t) \equiv u_{n+i}^0(x, t) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

з точністю до як завгодно малого додатного δ.

Зобразимо (8) у вигляді

$$u_s(x, t) = g_s(x_s(0; x, t)) + \int_0^t f_s(x_s(\tau, x, t), \tau, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}^0,$$
$$u_{n+2}^0, \ldots)\, d\tau + \int_0^t [f_s(x_s(\tau; x, t), \tau, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots) -$$
$$- f_s(x_s(\tau; x, t), \tau, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}^0, u_{n+2}^0, \ldots)]\, d\tau. \tag{12}$$

Враховуючи (6) і (10), з (9), (11) та (12) одержимо

$$|u_k(x, t) - v_k(x, t)| < K \int_0^t \Delta W(x_k(\tau; x, t), \tau)\, d\tau + KT\delta \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$|u_{n+i}(x, t) - v_{n+i}(x, t)| < \delta \qquad (i = 1, 2, \ldots). \tag{13}$$

Використовуючи нерівність Грануолла — Беллмана [10, стор. 46] для функції

$$U(t) = \max_{k;\ x;\ \tau \leqslant t} |u_k(x, \tau) - v_k(x, \tau)| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

з (13) одержимо

$$U(t) < KT\delta e^{Kt} \leqslant KT\delta e^{KT}.$$

Звідси випливає, що

$$|u_k(x, t) - v_k(x, t)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

бо $\delta \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорему доведено.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ю. А. Митропольский, Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний, «Наука», М., 1964.
2. Ю. А. Митропольский, Лекции по методу усреднения в нелинейной механике, «Наукова думка», К., 1971.
3. Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков, Лекции по применению асимптотических методов к решению уравнений в частных производных, Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1968.
4. К. П. Персидский, Счетные системы дифференциальных уравнений и устойчивость их решений, Изв. АН КазССР, сер. матем. и мех., 7(11), 1959; 8(12), 1959; 9(13), 1961.

5. О. А. Жаутиков, О применении метода усреднения к решению одного уравнения в частных производных, встречающегося в теории колебаний, сб. Приближенные методы решения дифференциальных уравнений, вып. 2, «Наукова думка», К., 1964.
6. Е. И. Глузберг, О задаче Коши для счетной системы дифференциальных уравнений в частных производных, Труды Первой Казахской межвузовской научн. конф. по матем. и мех., Алма-Ата, 1965.
7. Г. П. Хома, Об одной смешанной задаче, Математическая физика, вып. 10, «Наукова думка», К., 1971.
8. В. Т. Яцюк, К исследованию счетных систем дифференциальных уравнений в пространстве C^{∞}, сб. Асимптотические и качественные методы в теории нелинейных колебаний, Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1971.
9. И. Г. Петровский, Лекции об уравнениях с частными производными, Физматгиз, М., 1961.
10. Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1954.

Надійшла 13.XI 1970 р.,
після переробки — 30.XI 1971 р.
Інститут математики АН УРСР