УДК 517.941

К вопросу о дихотомии для решений систем линейных дифференциальных уравнений

Б. И. Голец, В. Л. Кулик

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X, \tag{1}$$

где $A(t)$ — матрица размеров $(n+m)\times(n+m)$, элементы которой определены, непрерывны и ограничены функцией на промежутке $(-\infty, \infty)$.

Найдем для этой системы достаточные условия того, чтобы решения были дихотомичными в том смысле, что некоторая часть их стремится к нулю при $t \to +\infty$, а часть — при $t \to -\infty$. Вопросы о дихотомии, а также экспоненциальной дихотомии для решений системы (1) рассматривал ряд авторов, например [1, 2]. Эти вопросы играют огромную роль как в линейных, так и в нелинейных дифференциальных уравнениях. Задачу будем решать при помощи функции Ляпунова V, взятой в виде $V = \langle SX, X\rangle$, где S — постоянная симметричная матрица и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Пусть $\dot V = \langle SAX, X\rangle \leqslant -\gamma\langle X, X\rangle$, где $\gamma > 0$.

Известно, что если матрица S положительно определена, то для всех решений системы (1) имеет место оценка

$$\| X(t)\| \leqslant Ce^{-\gamma(t-t_0)}\cdot\| X(t_0)\| \qquad \text{при } t \geqslant t_0.$$

Всюду в дальнейшем под нормой вектора в евклидовом пространстве понимаем квадратный корень из суммы квадратов его координат.

Рассмотрим вопрос о решениях системы (1) в том случае, когда невырожденная симметричная матрица S имеет n положительных собственных чисел и m отрицательных.

Не уменьшая общности, возьмем в качестве S матрицу I, имеющую вид

$$I = I_1 + I_2, \qquad I_1 = \begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad I_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -E_2 \end{bmatrix},$$

где E_1 и E_2—единичные матрицы размерности соответственно $n\times n$ и $m\times m$.

Представим матрицу A в виде:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где матрицы A_{11} и A_{22} размерности $n\times n$ и $m\times m$ соответственно.

Тогда систему (1) можно записать так:

$$\frac{dY}{dt} = A_{11}(t)\,Y + A_{12}(t)\,Z, \qquad \frac{dZ}{dt} = A_{21}(t)\,Y + A_{22}(t)\,Z, \tag{1'}$$

где $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_m \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ \vdots \\ x_{n+m} \end{bmatrix}$.

Покажем, что евклидово пространство $\mathcal{E}^{n+m}$ начальных данных разбивается на прямую сумму двух подпространств $\mathcal{E}^n$ и $\mathcal{E}^m$ таких, что решения системы (1), начинающие в $\mathcal{E}^n$ и $\mathcal{E}^m$, стремятся экспоненциально к нулю соответственно при $t \to \infty$ и $t \to -\infty$. Докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть матрица $A(t)$ удовлетворяет условию*

$$\sup_{\|X\|=1} \langle IAX, X\rangle \leqslant -\gamma \tag{2}$$

для всех $t \in (-\infty, +\infty)$, где $\gamma > 0$.

Тогда существует фундаментальная матрица решений $X(t)$ системы (1), для которой выполняются неравенства:

$$\| X(t)\, I_1 \| \leqslant C \exp\{-\gamma^* t\} \tag{3}$$

для $t > 0$,

$$\| X(t)\, I_2 \| \leqslant C \exp\{\gamma^* t\} \tag{4}$$

для $t < 0$, где $0 < \gamma^* < \gamma$ и C — постоянная.

Доказательство. Сначала рассмотрим $t \in [0, +\infty)$. Из системы (1′), учитывая (2), легко получить

$$\frac{d}{dt}(\|Y\|^2 - \|Z\|^2) \leqslant -2\gamma(\|Y\|^2 + \|Z\|^2). \tag{5}$$

Введем такие обозначения:

$$L(Y, Z) = \|Y\|^2 - \|Z\|^2, \qquad L^\varepsilon(Y, Z) = L(Y, Z) + \varepsilon(\|Y\|^2 + \|Z\|^2). \tag{6}$$

Покажем, что можно подобрать $\varepsilon > 0$ таким, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{dL^\varepsilon(Y, Z)}{dt} \leqslant -2\gamma^*(\|Y\|^2 + \|Z\|^2), \tag{7}$$

где $0 < \gamma^* < \gamma$. Действительно,

$$\frac{dL^\varepsilon(Y, Z)}{dt} = \frac{dL}{dt} + \varepsilon\left(\frac{d\|Z\|^2}{dt} + \frac{d\|Y\|^2}{dt}\right) \leqslant$$

$$\leqslant -2\gamma^*(\|Y\|^3 + \|Z\|^2), \qquad \gamma^* = \gamma - \varepsilon M \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \gamma,$$

где M — некоторая постоянная.

Допустим, что некоторое решение $\begin{bmatrix} Y^*(t) \\ Z^*(t) \end{bmatrix}$ системы (1′) удовлетворяет условию

$$L(Y^*, Z^*) > 0 \tag{8}$$

для всех $t \in [0, +\infty)$. Тогда, учитывая (5) — (7), получаем $0 < L(Y^*, Z^*) < L^\varepsilon(Y^*, Z^*) \leqslant C_1 \exp\{-2\gamma^* t\}$, откуда следует оценка

$$\|Y^*(t)\|^2 + \|Z^*(t)\|^2 \leqslant \frac{C_1}{\varepsilon} \exp\{-2\gamma^* t\}. \tag{9}$$

Покажем, что существует n линейно независимых решений $\begin{bmatrix} Y_i \\ Z_i \end{bmatrix}$, $i = 1, \ldots, n$, системы (1′), для которых выполняется условие (8):

$$L(Y, Z) = \| Y \|^2 \left(1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{z_k^2}{\| Y \|^2}\right). \tag{10}$$

Обозначим

$$W = (w_1, \ldots, w_m) \equiv \left(\frac{z_1}{\| Y \|}, \ldots, \frac{z_m}{\| Y \|}\right). \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует, что условие (8) эквивалентно условию

$$\| W \|^2 = \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{z_k^*(t)}{\| Y^* \|}\right)^2 < 1 \tag{8'}$$

для всех $t \in [0, +\infty)$.

Зафиксируем некоторый n-мерный числовой вектор Y_0 на единичной сфере $\| Y_0 \| = 1$. Пусть $W(t, W_0)$ — вектор-функция, соответствующая решению системы (1′), построенному по начальным условиям

$$\begin{bmatrix} Y \\ Z \end{bmatrix}\Bigg|_{t=0} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ W_0 \end{bmatrix}.$$

В пространстве (W, t) рассмотрим цилиндр $C = \{(W, t) : \| W \| = 1,\ t \geqslant 0\}$. Пусть $S = \{(W, 0) : \| W \| \leqslant 1\}$. Используя (5) и (10), получаем, что если $\| W_0 \| = 1$, то

$$\| W(t, W_0) \| > 1 \tag{12}$$

для всех $t > 0$.

Покажем, что существует начальная точка $W_0 \in S$ такая, что функция $W(t, W_0)$ удовлетворяет условию (8′).

Пусть это не так. Тогда для каждой точки $W_0 \in S$ функция $W(t, W_0)$ в некоторый момент $t_1(W_0)$ попадает на поверхность C и для $t > t_1(W_0)$ выполняется неравенство $\| W(t, W_0) \| > 1$.

Пусть Π_0 — отображение $S \xrightarrow{\text{в}} C$, действующее по закону

$$\Pi_0(W_0, 0) = \begin{cases} (W(t_1(W_0), W_0), t_1(W_0)), & \text{если } W_0 \in S \setminus C, \\ (W_0, 0), & \text{если } W_0 \in S \cap C. \end{cases}$$

Докажем непрерывность отображения Π_0. Зафиксируем некоторую точку $(\overline{W}, 0)$ (не обязательно на S) и пусть ей соответствует функция $W(t, \overline{W})$, определенная на промежутке $[0, T]$. Покажем, что для точек $(\overline{\overline{W}}, 0)$, близких к $(\overline{W}, 0)$, функции $W(t, \overline{\overline{W}})$ определены и мало отличаются от $W(t, \overline{W})$ на промежутке $[0, T]$. Обозначим решения системы (1′) с начальными условиями $\begin{bmatrix} Y_0 \\ \overline{W} \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} Y_0 \\ \overline{\overline{W}} \end{bmatrix}$ соответственно через $\begin{bmatrix} \overline{Y}(t) \\ \overline{Z}(t) \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} \overline{\overline{Y}}(t) \\ \overline{\overline{Z}}(t) \end{bmatrix}$.

Понятно, что существует число $\overline{\nu} > 0$ такое, что для всех $t \in [0, T]$

$$\| \overline{Y}(t) \| \geqslant \overline{\nu}. \tag{13}$$

Не уменьшая общности, можно считать, что

$$\| \overline{Y}(t) - \overline{\overline{Y}}(t) \| + \| \overline{Z}(t) - \overline{\overline{Z}}(t) \| < \varepsilon < \overline{\nu} \tag{14}$$

для произвольного наперед заданного $0 < \varepsilon < \overline{\nu}$ и всех $t \in [0, T]$. Имеем

$$\| \overline{\overline{Y}}(t) \| \geqslant \| \overline{Y}(t) \| - \| \overline{\overline{Y}}(t) - \overline{Y}(t) \| \geqslant \overline{\nu} - \varepsilon > 0, \qquad \| \overline{Y} \| + \| \overline{Z} \| \leqslant K, \tag{15}$$

где K — некоторая постоянная, зависящая от $\overline{W}$. Учитывая (13) — (15), получаем

$$\| W(t, \overline{W}) - W(t, \overline{\overline{W}}) \| = \left[\sum_{k=1}^{m} \left(\frac{\overline{z}_k(t)}{\| \overline{Y} \|} - \frac{\overline{\overline{z}}_k}{\| \overline{\overline{Y}} \|} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\overline{\nu}(\overline{\nu} - \varepsilon)} \left[\sum_{k=1}^{m} \left(\left| \| \overline{\overline{Y}} \| - \| \overline{Y} \| \right| | \overline{z}_k | + \| \overline{Y} \| \, | \overline{z}_k - \overline{\overline{z}}_k | \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leqslant \frac{2K \sqrt{m}}{\overline{\nu}(\overline{\nu} - \varepsilon)} \varepsilon, \qquad (16)$$

откуда и следует непрерывность отображения Π_0. Обозначим через Π отображение $C \xrightarrow{\text{в}} S \cap C$, проектирующее поверхность C на границу $S \cap C$. Рассматривая композицию этих отображений $\Pi\Pi_0$ и учитывая (12), приходим к противоречию, так как замкнутый круг нельзя отобразить непрерывно на его границу.

Таким образом, существует такая точка $(W_0, 0) \in S$, что функция $W(t, W_0)$ удовлетворяет условию (8′), а поэтому существует хотя бы одно решение системы (1′), для которого выполняется условие (8). Меняя вектор Y_0, легко доказать существование n линейно независимых решений системы (1′), которые экспоненциально стремятся к нулю при $t \to +\infty$.

Аналогично доказывается существование m линейно независимых решений системы (1′), экспоненциально стремящихся к нулю при $t \to -\infty$. Теорема доказана. Пусть

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \Omega_1(t) & 0 \\ 0 & -\Omega_2(t) \end{bmatrix},$$

где $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ — квадратные матрицы размеров соответственно $n \times n$ и $m \times m$, элементы которых являются непрерывно дифференцируемые функции на $(-\infty, +\infty)$, A^* — матрица, транспонированная к A.

Аналогично доказательству теоремы 1 легко доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть*: 1) *коэффициенты* $a_{ij}(t)$ *системы* (1) — *непрерывные и ограниченные на* $(-\infty, \infty)$ *функции*;

2) *существует матрица* $\Omega(t)$ $(m \cdot n \neq 0)$ *такая, что для произвольного вектора* $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ *выполняются неравенства*

$$\langle \Omega_1 \eta_1, \eta_1 \rangle \geqslant \gamma_1 \| \eta_1 \|^2, \qquad \langle \Omega_2 \eta_2, \eta_2 \rangle \geqslant \gamma_2 \| \eta_2 \|^2,$$

$$\left\langle \left(\Omega A + A^* \Omega + \frac{d}{dt} \Omega \right) \eta, \eta \right\rangle \leqslant -\gamma_0 \| \eta \|^2,$$

где $\gamma_i > 0$.

Тогда у системы (1) *существует n линейно независимых решений, которые экспоненциально стремятся к нулю при* $t \to \infty$ *и m линейно независимых решений, которые экспоненциально стремятся к нулю при* $t \to -\infty$.

Авторы глубоко благодарят А. М. Самойленко за ценные указания и советы при написании статьи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. Харшман, Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Мир». М., 1970.
2. Х. Массера, Х. Шефер, Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства, «Мир», М., 1970.

Поступила 4.X 1971 г.,
после переработки — 17.III 1972 г.
Черновицкий государственный университет,
Институт математики АН УССР