УДК 517.917

Теорема типа теоремы Ляпунова об устойчивости многомерной системы

А. А. Мартынюк

В работе содержится подход к исследованию устойчивости движения систем высокого порядка (многомерных систем) путем декомпозиции на подсистемы более низкого порядка, в результате которой при функциях связи подсистем появляется малый положительный параметр. При этом задача об устойчивости исходной системы решается вторым методом Ляпунова [1] посредством анализа подсистем с учетом знака среднего от произведения градиента функции Ляпунова, построенной для соответствующей подсистемы на вектор-функцию, учитывающую связь подсистем. Усреднение здесь проводится вдоль интегральных кривых независимых подсистем с вырожденными функциями связей. Идея такого усреднения восходит к трудам Н. Н. Боголюбова [2, 3] и исследованиям В. М. Волосова [4]. Для систем с постоянно действующими возмущениями такой подход применялся М. М. Хапаевым [5, 6].

1. Постановка задачи. Пусть E_n обозначает действительное n-мерное евклидово пространство, в котором норма вектора x определяется по формуле $\| x \| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Обозначим через I_t^+ интервал времени: $[t_0, \infty)$, $-\infty < t_0 < +\infty$.

В этом случае векторное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1.1}$$

где $x \in E_n$, $f \in E_n \times I_t^+$, определяет поведение соответствующей многомерной системы в области $E_n \times I_t^+$. Предполагается, что решение $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ системы (1.1) существует и единственно на $G_\delta \times I$, где $G_\delta \subset E_n$ и $I \subset I_t^+$, $I = [t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + T]$, $T > 0$ — const при всяком наборе начальных значений $x_0 \in G_\delta$.

Предположим, что система (1.1) декомпозирована на m подсистем

$$\frac{d[x]}{dt} = X(t, [x], \varepsilon F(t, [\widetilde{x}])). \tag{1.2}$$

Здесь в соответствии с работой [7] обозначаем:

$$[x] = \begin{pmatrix} \vec{x}^{(1)} \\ \vdots \\ \vec{x}^{(m)} \end{pmatrix}, \quad X(t, [x], 0) = \begin{pmatrix} \vec{f}^{(1)}(t, \vec{x}^{(1)}) \\ \cdots\cdots \\ \vec{f}^{(m)}(t, \vec{x}^{(m)}) \end{pmatrix},$$
$$F(t, [\widetilde{x}]) = \begin{pmatrix} \vec{F}^{(1)}(t, \vec{x}^{(2)}, \ldots, \vec{x}^{(m)}) \\ \vec{F}^{(\nu)}(t, \vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(\nu-1)}, \vec{x}^{(\nu+1)}, \ldots, \vec{x}^{(m)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \vec{F}^{(m)}(t, \vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(m-1)}) \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

ε — малый параметр, $m < n$.

Систему (1.2) представим в виде

$$\frac{d\vec{x}^{(s)}}{dt} = \vec{f}^{(s)}(t, \vec{x}^{(s)}) + \varepsilon \vec{F}^{(s)}(t, [\widetilde{x}]) \quad (s = 1, 2, \ldots, m); \tag{1.4}$$

здесь вектор $\vec{x}^{(s)}$ имеет размерность r_s и $\sum_{s=1}^{m} r_s = n$, вектор-функции $\vec{f}^{(s)}$ и $\vec{F}^{(s)}$ — также размерности r_s, $\vec{f}^{(s)}$ — липшицевы с константами N^s.

Из систем (1.4) выделим k-ю подсистему и сформулируем некоторые определения.

Определение. Нулевое решение k-й подсистемы называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $A_k > 0$ существует $\lambda_k = \lambda_k(A_k)$ такое, что любое другое решение $\vec{x}^{(k)} = (x_1, \ldots, x_{r_k})$ подсистемы (1.4), удовлетворяющее при $t = t_0$ условию

$$\| \vec{x}^{(k)}(t_0) \| < \lambda_k,$$

удовлетворяет при $t \geqslant t_0$ условию

$$\| \vec{x}^{(k)}(t) \| < A_k.$$

Обозначим

$$\Lambda_k = \{x : \| \vec{x}^{(k)} \| < \lambda_k\}, \quad \overline{\Lambda}_k = \{x : \| \vec{x}^{(k)} \| \leqslant \lambda_k\}$$

и предположим, что все подсистемы (1.4) устойчивы по Ляпунову, т. е.

$$\| \vec{x}^{(1)}(t) \| < A_1, \ldots, \| \vec{x}^{(m)}(t) \| < A_m, \quad t \geqslant t_0,$$

лишь только $\| \vec{x}^{(1)}(t_0) \| < \lambda_1, \ldots, \| \vec{x}^{(m)}(t_0) \| < \lambda_m$.

Учитывая, что $\| [x] \| \leqslant \sum_{s=1}^{m} \| \vec{x}^{(s)} \|$, получаем $\| [x(t)] \| < A$ при $t \geqslant t_0$, лишь только $\| [x(t_0)] \| < \lambda$, где $A = \sum_s A_s$, $\lambda = \sum_s \lambda_s$. Выбирая, например, $A_s = \dfrac{A}{m}$ и определяя $\lambda_s = \dfrac{\lambda(A)}{m}$ при любом $A > 0$, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма. *Нулевое решение системы* (1.1) *устойчиво по Ляпунову, если нулевое решение каждой из подсистем* (1.4) *устойчиво по Ляпунову.*

Аналогично устанавливается свойство равномерной асипмтотической и других типов устойчивости системы (1.1), исходя из свойств подсистем (1.4).

2. Теорема об устойчивости. Рассмотрим систему (1.4) при $\varepsilon = 0$. В этом случае получается m независимых подсистем

$$\frac{d\vec{x}^{(s)}}{dt} = \vec{f}^{(s)}(t, \vec{x}^{(s)}), \quad s = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.1}$$

каждая из которых имеет точку покоя $(0, \ldots, 0)$, так что $\vec{f}^{(s)}(t, 0) = 0$.

Зафиксируем k-ю подсистему

$$\frac{d\vec{x}^{(k)}}{dt} = \vec{f}^{(k)}(t, \vec{x}^{(k)}), \tag{2.2}$$

имеющую решение $\vec{x}^{(k)} = y^{(k)}(t)$ при $\vec{x}^{(k)}(t_0) = \vec{y}_0^{(k)}$, и сформулируем основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть подсистема* (2.2) *такова, что выполняются условия:*

1) *по переменным* $\vec{x}^{(k)}$ *существует определенно положительная функция Ляпунова* $V^{(k)}(t, \vec{x}^{(k)})$, *допускающая бесконечно малый высший предел* [1];

2) *полная производная функции* $V^{(k)}(t, \vec{x}^{(k)})$ *в области* $\Gamma_k \times I_t^+$ *вдоль траекторий подсистемы* (2.2) *неположительна*:

$$\frac{\partial V^{(k)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial x_j} f_j(t, \vec{x}^{(k)}) \leqslant 0;$$

3) *частные производные* $\partial V^{(k)} / \partial x_j$ *непрерывны по* x_j *в области* Γ_k *равномерно относительно* t *в промежутке* $0 \leqslant t < \infty$;

4) *функции связи подсистем* $\vec{F}^{(k)}(t, [\widetilde{x}])$ *в области* D $[\widetilde{x}] \in D$ *непрерывны по* $\vec{x}^{(l)}$ *равномерно относительно* t *в промежутке* $0 \leqslant t < \infty$ *и подчинены неравенству*

$$\| \vec{F}^{(k)}(t, [\widetilde{x}]) \| < M \quad (M > 0 - \text{const});$$

5) *равномерно относительно* $(t_0, [x_0])$ *существует среднее*

$$\Theta_0^{(k)}(t_0, [x_0]) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} J^{(k)}(t, [x])\, dt,$$

где

$$J^{(k)}(t, [x]) = \sum_{j=1}^{r_k} \frac{\partial V^{(k)}}{\partial x_j} F_j(t, [\widetilde{x}]),$$

вычисляемое вдоль интегральных кривых подсистем (2.1) *с начальными условиями* $\vec{x}^{(s)}(t_0) = \vec{x}_0^{(s)}$.

При этом вне сколь угодно малой окрестности точки покоя $\vec{x}^{(k)} = 0$ *подсистемы* (2.2) *среднее* $\Theta_0^{(k)}$ *строго меньше нуля*:

$$\Theta_0^{(k)}(t_0, [x_0]) < -\delta^2 < 0.$$

При выполнении этих условий для любого A_k *можно указать такие значения* $\lambda_k(A_k)$ *и* $\varepsilon_0(A_k)$, *при которых всякое решение подсистемы* (1.4) *с начальными значениями* $\| \vec{x}_0^{(k)} \| < \lambda_k$ *при* $\varepsilon < \varepsilon_0(A_k)$ *для всех* $t \geqslant 0$ *удовлетворяет неравенству* $\| \vec{x}^{(k)}(t) \| < A_k$.

Доказательство. Пусть задано число $A_k > 0$. Посредством неравенства $0 < A_k' < A_k$ введем число A_k'. При выполнении 1) и 2) условий теоремы 1, согласно теореме Ляпунова об устойчивости [1], нулевое решение подсистемы (2.2) устойчиво, т. е. можно указать такое $\lambda_k' < A_k'$, что решения $\vec{y}^{(k)}(t)$ подсистемы (2.2), удовлетворяющие в начальный момент условию $\| \vec{y}^{(k)}(t_0) \| < \lambda_k'$ для $t \geqslant t_0$, будут подчинены неравенству $\| \vec{y}^{(k)}(t) \| < A_k'$.

Пусть

$$e_{\lambda_k'} = \min (W^{(k)}(\vec{x}^{(k)}) \text{ при } \| \vec{x}^{(k)} \| = \lambda_k'),$$

где $W^{(k)}(\vec{x}^{(k)})$ — определенно положительная функция, не зависящая от t, такая, что $V^{(k)}(t, \vec{x}^{(k)}) \geqslant W^{(k)}(\vec{x}^{(k)})$.

Очевидно, что

$$S_{W^{(k)}} = \{x : W^{(k)}(\vec{x}^{(k)}) = c_{\lambda_k'}\} \subset \{x : \|\vec{x}^{(k)}\| < \lambda_k'\}$$

и подвижная поверхность $V^{(k)}(t, \vec{x}^{(k)}) = c_{\lambda_k'}$ при всех $t \geqslant t_0$

$$S_{V^{(k)}} \subset S_{W^{(k)}}.$$

В силу свойств функции $V^{(k)}(t, \vec{x}^{(k)})$ найдется число λ_k такое, что окрестность $\|\vec{x}^{(k)}\| < \lambda_k$ точки покоя подсистемы (2.2) при всех $t \geqslant t_0$ будет содержаться внутри поверхности $S_{V^{(k)}}$.

Выпустим траекторию $\vec{x}^{(k)}(t)$ в момент $t = t_0$ из области $\|\vec{x}^{(k)}\| < \lambda_k$ и предположим, что в момент $t = 0$ траектория $\vec{x}^{(k)}(t)$ пересекла поверхность $S_{V^{(k)}}$.

Для функции $V^{(k)}(t, \vec{x}^{(k)})$ вдоль траектории k-й подсистемы (1.4) имеет место оценка

$$V^{(k)}(t, \vec{x}^{(k)}) \leqslant V_0^{(k)}(t_0, \vec{x}_0^{(k)}) + \varepsilon \int_{t_0}^{t} J^{(k)}(t, [x])\, dt. \tag{2.3}$$

Для оценки интеграла $\int_{t_0}^{t} J^{(k)}(t, [x])\, dt$ воспользуемся результатами работы [5].

Для этого отметим предварительно, что для расстояния между решениями k-й подсистемы (1.4) и подсистемы (2.2) на интервале $[t_0, t_0 + 2l]$ имеет место оценка

$$\|\vec{x}^{(k)}(t) - \vec{y}^{(k)}(t)\| \leqslant \varepsilon 2Mle^{2N^k l}. \tag{2.4}$$

Учитывая, что решение подсистемы (2.2) лежит в области $\|\vec{x}^{(k)}\| < A_k'$, нетрудно найти, что $\vec{x}^{(k)}(t)$ не выйдет за пределы области $\|\vec{x}^{(k)}\| < A_k$ при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + 2l$, если $\|\vec{x}^{(k)} - \vec{y}^{(k)}\| < A_k - A_k'$. Для этого достаточно взять

$$\varepsilon < \varepsilon_1 = \frac{A_k - A_k'}{M \cdot 2le^{2N^k l}}.$$

В силу непрерывности $J^{(k)}(t, [x])$ в области D можно указать ε_2 такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_2$

$$\int_{t_0}^{t} [J^{(k)}(t_1, [x]) - J^{(k)}(t, [y])]dt < (t - t_0)\frac{\delta^2}{4}.$$

Выбрав $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, нетрудно найти, что при $t \in [t_0, t_0 + 2l]$ имеет место оценка

$$\int_{t_0}^{t} J^{(k)}(t, [x])\, dt < \left[\Theta_0^{(k)}(t_0, [x_0]) + \varkappa(t) + \frac{\delta^2}{4}\right](t - t_0) <$$

$$< \left[-\delta^2 + \frac{\delta^2}{2}\right](t - t_0) < \left(-\frac{\delta^2}{2}\right)(t - t_0). \tag{2.5}$$

Здесь $\lim \varkappa(t) = 0$, $t \to \infty$. Из оценки (2.5) следует, что интеграл $\int\limits_{t_0}^{t} J^{(k)}(t, [x])\, dt$ по крайней мере, начиная с $t > t_0 + 2l$, становится отрицательным. Следовательно, интегральная кривая $\vec{x}^{(k)}(t)$ после выхода за пределы поверхности $S_{V^{(k)}}$ в силу выбора $\varepsilon < \varepsilon_0$ останется в области $\| \vec{x}^{(k)}(t) \| < A_k$ при $t \in [t_0, t_0 + 2l]$.

Согласно неравенству (2.3) функция $V^{(k)}(t, \vec{x}^{(k)}(t))$, начиная с некоторого $t > t_0$, убывает и найдется $t_1 \in [t_0, t_0 + 2l]$, при котором $\vec{x}^{(k)}(t)$ вернется во внутрь поверхности $S_{V(k)}$.

Так как все оценки равномерны по t_0, то траектория $\vec{x}^{(k)}(t)$ может сколь угодно раз покидать поверхность $S_{V(k)}$ и возвращаться в нее, оставаясь в области $\| \vec{x}^{(k)} \| < A_k$.

Этим теорема доказана.

Теперь на основе леммы и теоремы 1 формулируется следующее предложение.

Теорема 2. *Если для каждой подсистемы* (1.4) *выполняются все условия теоремы* 1, *то многомерная система* (1.1) *устойчива по Ляпунову.*

Замечание 1. Условия 3) и 4) теоремы 1 можно ослабить. Действительно, оценку (2.4) можно получить, если

$$\| F^{(k)}(t, [\widetilde{x}] \| < \sigma^{(k)}(t)$$

и для любого конечного интервала $[t_1, t_2]$

$$\int\limits_{t_0}^{t} \sigma^{(k)}(t)\, dt < \sigma_0^{(k)}(t - t_0), \qquad \sigma_0^{(k)} > 0 - \mathrm{const},$$

$\sigma^{(k)}(t)$ — интегрируемая функция.

Оценку разности $J^{(k)}(t, [x]) - J^{(k)}(t, [y])$ можно получить, если существует интегрируемая функция $\Delta^{(k)}(t)$ и постоянная $\Delta_0^{(k)}$, а также неубывающая функция $\chi(\alpha)$, $\lim\limits_{\alpha \to 0} \chi(\alpha) = 0$, такие, что

$$|J^{(k)}(t, [x]) - J^{(k)}(t, [y])| < \chi(\| \vec{x}^{(k)} - \vec{y}^{(k)} \|)\, \Delta^{(k)}(t),$$

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} \Delta^{(k)}(t)\, dt < \Delta_0^{(k)}(t_2 - t_1), \qquad (t_1, t_2) \in I \subset I_t^+.$$

Замечание 2. Исследование на устойчивость многомерной системы (1.2) в случае $\Theta_0^{(k)}(t_0, [x_0]) \equiv 0$ проводится путем применения возмущенной функции Ляпунова [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат, М., 1950.
2. Н. Н. Боголюбов, О некоторых статистических методах в математической физике, Изд-во АН УССР, К., 1945.
3. Н. Н. Боголюбов, Теория возмущений в нелинейной механике, сб. Ин-та строительной механики АН УССР, вып. 14, 1950.
4. В. М. Волосов, О методе усреднения, ДАН СССР, т. 137, № 1, 1961.
5. М. М. Хапаев, Об одной теореме типа Ляпунова, ДАН СССР, т. 176, № 6, 1967.

6. М. М. Хапаев, Об исследовании на устойчивость в теории нелинейных колебаний, Математические заметки, т. 3, вып. 3, 1968.
7. А. А. Мартынюк, О технической устойчивости сложных систем, сб. Кибернетика и вычислительная техника. Сложные системы управления, вып. 15, «Наукова думка», К., 1972.

Поступила 28.IX 1971 г.
Институт математики АН УССР