УДК 517.912.2

Исследование линейной двумерной дифференциальной системы

С. Г. Олейник

В статье рассматривается дифференциальная система второго порядка

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \\ f_3(t) & f_4(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

в которой $f_i(t)$ $(i = 1,2\ 3,\ 4)$ — непрерывные на интервале (a, b) функции, a и b могут быть несобственными, т. е. равняться соответственно $-\infty$ и $+\infty$.

Применительно к системе (1) излагается метод приведения подобных систем к треугольному виду с последующим приведением последнего к диагональному виду. В совокупности эти следующие друг за другом приведения представляют собой процесс диагонализации, состоящий в следующем.

В системе (1) делаем преобразование:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ u_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где $b_{11}b_{22} \neq 0$, u_{21} определяется из уравнения Риккати

$$\dot{u}_{21} = \left(\frac{\dot{b}_{11}}{b_{11}} - f_1 + f_4 \right) u_{21} - \frac{f_2}{b_{11}} u_{21}^2 + b_{11} f_3. \tag{3}$$

Система (1) вследствие преобразования (2) принимает вид:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + f_2 \dfrac{u_{21}}{b_{11}} - \dfrac{\dot{b}_{11}}{b_{11}} & \dfrac{b_{22}}{b_{11}} f_2 \\ 0 & f_4 - \dfrac{f_2}{b_{11}} u_{21} - \dfrac{\dot{b}_{22}}{b_{22}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

В полученной системе (4) делаем следующее преобразование:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & u_{12} \\ 0 & \beta_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $\beta_{11}\beta_{22}\neq 0$, u_{12} определяется из линейного уравнения

$$\dot{u}_{12}=\left(\frac{\dot{\beta}_{22}}{\beta_{22}}+f_1-f_4+2\frac{f_2}{b_{11}}u_{21}-\frac{\dot{b}_{11}}{b_{11}}+\frac{\dot{b}_{22}}{b_{22}}\right)u_{12}+\beta_{22}\frac{b_{22}}{b_{11}}f_2. \tag{6}$$

После преобразования (5) система (4) приводится к диагональному виду:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1+\frac{f_2u_{21}}{b_{11}}-\frac{\dot{b}_{11}}{b_{11}}-\frac{\dot{\beta}_{11}}{\beta_{11}} & 0 \\ 0 & f_4-\frac{f_2}{b_{11}}u_{21}-\frac{\dot{b}_{22}}{b_{22}}-\frac{\dot{\beta}_{22}}{\beta_{22}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Отметим, что задаче отыскания матрицы линейного преобразования, приводящего заданную линейную систему к треугольному (диагональному) виду, посвящено достаточно много работ. Отметим лишь некоторые из них. а именно работы [1—3].

В данной работе, используя предложенный процесс диагонализации с предварительной триангуляцией дифференциальной системы, получены новые результаты, связанные с рассматриваемой постановкой задачи. Приступим к их изложению.

Для этой цели сначала изложим способ представления решения уравнения Риккати в виде равномерно сходящегося ряда. Рассматривается случай мажорируемости данного ряда сходящейся геометрической прогрессией с заданным знаменателем.

Пусть

$$p=\frac{\dot{b}_{11}}{b_{11}}-f_1+f_4,\quad q=-b_{11}^{-1}f_2,\quad r=b_{11}f_3. \tag{8}$$

Члены ряда

$$u_{21}=\sum_{s=1}^{\infty}\varphi_s, \tag{9}$$

в виде которого отыскивается решение уравнения

$$\dot{u}_{21}=pu_{21}+qu_{21}^2+r, \tag{10}$$

определяем из последовательности линейных неоднородных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\dot{\varphi}_1=p\varphi_1+r,\\
&\dot{\varphi}_2=p\varphi_2+q\varphi_1^2,\\
&\dot{\varphi}_3=p\varphi_3+q\,(2\varphi_1\varphi_2+\varphi_2^2),\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\
&\dot{\varphi}_n=p\varphi_n+q\left(2\varphi_{n-1}\sum_{k=1}^{n-2}\varphi_k+\varphi_{n-1}^2\right)\\
&\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{aligned} \tag{11}$$

Последовательность (11) получена из разложения решения уравнения

$$\dot{u}_{21}=pu_{21}+\varepsilon qu_{21}^2+r$$

по степеням параметра ε, который затем положен равным единице.

Предположим, что функции $q(t)$ и $r(t)$ при $t \in (a, b)$ являются ограниченными, следовательно, удовлетворяют неравенствам

$$\sup_{t\in(a,b)} |q(t)| \leqslant l, \qquad \sup_{t\in(a,b)} |r(t)| \leqslant m, \tag{12}$$

а функция $p(t)$ при $t \in (a, b)$ отделена от нуля:

$$\sup_{t\in(a,b)} |p(t)| \geqslant k > 0, \tag{13}$$

т. е. $p(t) \geqslant k$ или $-p(t) \geqslant k$. Тогда в случае несобственных a и b, как об этом указано в [1], единственные ограниченные решения ξ_1 и ξ_2 уравнений

$$\dot{x}_1 = -p(t)\,x_1 + q(t), \tag{14}$$

$$\dot{x}_2 = p(t)\,x_2 + q(t) \tag{15}$$

соответственно представляются:

$$\xi_1 = e^{-\int\limits_0^t p(\tau)d\tau} \int\limits_{-\infty}^{t} e^{\int\limits_0^\tau p(\mu)d\mu} q(\tau)\,d\tau, \tag{16}$$

$$\xi_2 = -e^{\int\limits_0^t p(\tau)d\tau} \int\limits_{t}^{\infty} e^{-\int\limits_0^\tau p(\mu)d\mu} q(\tau)\,d\tau,$$

причем имеют место оценки:

$$\sup_{t\in(-\infty,\infty)} |\xi_i| \leqslant \frac{m}{k} \quad (i = 1, 2), \tag{17}$$

где $m = \sup\limits_{t\in(-\infty,\infty)} |q(t)|$.

Если же рассматривается случай конечных a, b и $p(t) \geqslant k$ при $t \in (a, b)$, то удовлетворяющие оценке (17) ограниченные на интервале (a, b) решения ξ_1 и ξ_2 уравнений (14) и (15) соответственно находятся по формулам:

$$\xi_1 = e^{-\int\limits_a^t p(\tau)d\tau} \int\limits_{a}^{t} e^{\int\limits_a^\tau p(\mu)d\mu} q(\tau)\,d\tau, \tag{18}$$

$$\xi_2 = -e^{\int\limits_a^t p(\tau)d\tau} \int\limits_{t}^{b} e^{-\int\limits_a^\tau p(\mu)d\mu} q(\tau)\,d\tau.$$

Построив ограниченное решение каждого уравнения последовательности (11), обозначив $\delta_0 = \dfrac{m}{k}$ и имея в виду оценки (17), получаем, что члены ряда (9) мажорируются соответственно членами ряда

$$D = \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s, \tag{19}$$

причем имеет место следующая рекуррентная зависимость:

$$\delta_s = \frac{l}{k}\left(2\delta_{s-1}\sum_{k=0}^{s-2}\delta_k + \delta_{s-1}^2\right), \quad s = 1, 2, \ldots \tag{20}$$

Потребуем, чтобы ряд (19) сходился не медленнее, чем сходится геометрическая прогрессия со знаменателем γ и первым членом δ_0, т. е. чтобы имело место неравенство:

$$\delta_s \leqslant \delta_0\gamma^s \quad (0 < \gamma < 1), \quad s = 0, 1, 2, \ldots \tag{21}$$

Допустив, что неравенство (21) имеет место для $s-1$ членов ряда (19), из (20) находим:

$$\delta_s \leqslant \frac{l}{k}\left(2\delta_0\gamma^{s-1}\cdot\delta_0\sum_{k=0}^{s-2}\gamma^k + \delta_0^2\gamma^{2(s-1)}\right) =$$

$$= \frac{l}{k}\,\delta_0^2\gamma^{s-1}\left(2\,\frac{1-\gamma^{s-1}}{1-\gamma} + \gamma^{s-1}\right) < \frac{l}{k}\,\delta_0^2\gamma^{s-1}\,\frac{2}{1-\gamma}.$$

Следовательно, чтобы неравенство (21) имело место при любом s, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{lm}{k^2} \leqslant \frac{\gamma(1-\gamma)}{2}, \tag{22}$$

что всегда возможно, если $\dfrac{lm}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{8}$.

Таким образом, если коэффициенты системы (1) и функция $b_{11}(t)$ удовлетворяют условиям:

$$\inf_{t\in(a,b)}\left|\frac{\dot b_{11}}{b_{11}} - f_1 + f_4\right| \geqslant k > 0, \qquad \sup_{t\in(a,b)}\left|\frac{f_2}{b_{11}}\right| \leqslant l, \qquad \sup_{t\in(a,b)}|b_{11}f_3| \leqslant m, \tag{23}$$

где числа k, l, m выполняют неравенство (22), то решение уравнения (10) представляется в виде равномерно сходящегося ряда и имеет место следующая оценка для суммы рассматриваемого ряда:

$$\sup_{t\in(a,b)}|u_{21}| \leqslant \frac{\delta_0}{1-\gamma}. \tag{24}$$

Из (23) видно, что функция $b_{11}(t)$ является некоторой дифференцируемой функцией, принимающей в заданный момент τ заданное значение. Положим его равным единице. Следовательно, $\dfrac{\dot b_{11}}{b_{11}}$ является некоторой функцией, принимающей в момент τ определенное значение. Обозначим упомянутую функцию символом $\omega_\tau(t)$. Имеем: $\dfrac{\dot b_{11}}{b_{11}} = \omega_\tau(t)$, откуда $b_{11} = \exp\int_\tau^t \omega_\tau(\theta)\,d\theta$. Положим $\tau = 0$ и обозначим $\omega_0(t)$ через $\omega(t)$. Из условий

(23) следует, что $\int_0^t w(\theta)\,d\theta$ при $t \in (a, b)$ является ограниченной функцией. Поэтому два последних условия (23), как легко убедиться, заменимы эквивалентными им более простыми условиями: $\sup_{t\in(a,b)} |f_2| \leqslant l$, $\sup_{t\in(a,b)} |f_3| \leqslant m$.

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 1. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям: найдется функция* $w(t)$ *такова, что для всех* $t \in (a, b)$

$$\left|\int_0^t w(\theta)\,d\theta\right| \leqslant M = \mathrm{const}, \quad |f_4 - f_1 + w| \geqslant k > 0, \quad |f_2| \leqslant l, \quad |f_3| \leqslant m, \tag{25}$$

где константы k, l, m *удовлетворяют соотношению*

$$\frac{lm}{k^2} \leqslant \frac{\gamma(1-\gamma)}{2} \leqslant \frac{1}{8}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Тогда система (1) *приводится к треугольному виду с помощью ляпуновского преобразования*

$$x_1 = e^{\int_0^t w(\theta)d\theta} y_1, \qquad x_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s y_1 + y_2, \tag{26}$$

где φ_s $(s = 1, 2, \ldots)$ — *ограниченные решения последовательности уравнений:*

$$\dot{\varphi}_1 = p\varphi_1 + r,$$

$$\dot{\varphi}_s = p\varphi_s + q\left(2\varphi_{s-1}\sum_{i=1}^{s-2}\varphi_i + \varphi_{s-1}^2\right), \quad s = 2, 3, \ldots,$$

$$p = f_4 - f_1 + w, \qquad q = -e^{-\int_0^t w(\theta)d\theta} f_2, \qquad r = e^{\int_0^t w(\theta)d\theta} f_3,$$

удовлетворяющие неравенствам $|\varphi_s| \leqslant \frac{m}{k}\gamma^s$, y_1, y_2 — *новые неизвестные, определяемые из системы*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 + f_2\sum_{s=1}^{\infty}\varphi_s - w & f_2 e^{-\int_0^t w(\theta)d\theta} \\ 0 & f_4 - f_2\sum_{s=1}^{\infty}\varphi_s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Придавая функции w конкретные выражения, приходим к тем или иным условиям приводимости к треугольному виду. Так, при $w = 0$ приходим к следующему утверждению.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям*

$$\sup_{t\in(a,b)} |f_2| \sup_{t\in(a,b)} |f_3| \leqslant \varkappa \inf_{t\in(a,b)} |f_4 - f_1| > 0, \quad \varkappa = \frac{\gamma(1-\gamma)}{2} \leqslant \frac{1}{8}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Тогда система (1) *приводится к треугольному виду с помощью ляпуновского преобразования* (26) *с* $w = 0$, $p = f_4 - f_1$, $q = -f_2$, $r = f_3$.

Если предположить, что функция $f_4 - f_1$ имеет интегральное среднее, отличное от нуля:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (f_4 - f_1)\, d\theta = c \neq 0,$$

то, положив $w = c - f_4 + f_1$, приходим к следующим условиям приводимости к треугольному виду.

Теорема 3. *Пусть коэффициенты системы* (1) *удовлетворяют условиям*:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t (f_4 - f_1)\, d\theta = c \neq 0,$$

$$\sup_{t\in(a,b)} \left| \int_0^t (f_4 - f_1 - c)\, d\theta \right| \leqslant M = \text{const},$$

$$\sup_{t\in(a,b)} |f_2| \sup_{t\in(a,b)} |f_3| \leqslant c^2 \varkappa, \qquad \varkappa = \frac{\gamma(1-\gamma)}{2}, \quad 0 < \gamma < 1.$$

Тогда система (1) *приводится к треугольному виду с помощью ляпуновского преобразования* (26) *с* $w = c - f_4 + f_1$, $p = c$, $q = -e^{-\int_0^t (c - f_4 + f_1) d\theta} f_2$, $r = e^{\int_0^t (c - f_4 + f_1) d\theta} f_3$.

Если рассматривать систему (1) только на конечном интервале (a, b), то из теоремы 1 легко видно, что привести ее к треугольному виду на данном интервале всегда возможно, так как по заданному k всегда найдется функция $p(t$ такая, что $|p(t)| \geqslant k$ (в частности, $p(t) \equiv k$), а $\int_0^t (p - f_4 + f_1)\, d\theta$ — ограниченная на интервале (a, b) функция.

Ставя вопрос о диагонализации системы (1), нужно решить линейное уравнение (6).

Но положив $b_{22} = 1$, $\beta_{22} = 1$ и предположив выполнение условий

$$\inf_{t\in(a,b)} |f_4 - f_1 + w| \geqslant k > 0, \qquad \left| \int_0^t \underset{t\in(a,b)}{w(\theta)}\, d\theta \right| \leqslant M = \text{const}, \tag{27}$$

$$\sup_{t\in(a,b)} |f_2| \sup_{t\in(a,b)} |f_3| \leqslant \frac{1}{2} k k_1 (1-\gamma) \inf_{t\in(a,b)} e^{\int_0^t w(\theta) d\theta}, \quad 0 < k_1 < k,$$

которые получены при учете (24), нетрудно убедиться в том, что решение уравнения (6) может быть найдено в виде (16) или (18).

Следовательно, если вместо условий (25) теоремы 1 взять подправленные условия в виде (27), то система (1) приводится к диагональному виду (7) при помощи преобразования

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}\beta_{11} & u_{12} b_{11} \\ u_{21}\beta_{11} & 1 + u_{21} u_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Проиллюстрируем применимость доказанных выше результатов для сведения к треугольному виду следующей системы уравнений:

$$\frac{dx_1}{dt} = 2\cos t x_2,$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{8}\sin t\, x_1 - 4x_2 \qquad (28)$$

периодической заменой переменных.

Положим $\gamma = \frac{1}{4}$. Легко убеждаемся, что коэффициенты системы (28) удовлетворяют условиям теоремы 2, поскольку $\varkappa = \frac{3}{32}$.

Согласно утверждению теоремы 2 система (28) ляпуновским преобразованием

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s y_1 + y_2$$

приводится к треугольному виду

$$\frac{dy_1}{dt} = 2\cos t \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s y_1 + 2\cos t y_2, \qquad \frac{dy_2}{dt} = \left(-4 - 2\cos t \sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s\right) y_2,$$

где члены ряда $\sum_{s=1}^{\infty} \varphi_s$ определяются из последовательности уравнений:

$$\dot{\varphi}_1 = -4f_1 + \frac{1}{8}\sin t, \qquad \dot{\varphi}_2 = -4\varphi_2 - 2\cos t\varphi_1^2 \text{ и т. д.}$$

Методом неопределенных коэффициентов находим:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2\cdot 17}\sin t - \frac{1}{8\cdot 17}\cos t,$$

$$\varphi_2 = \frac{1}{4624}\left(-\frac{1}{2}\sin t - \cos t + \frac{31}{40}\sin 2t + \frac{11}{20}\cos 2t\right).$$

Поскольку $|\varphi_1| \leqslant \frac{1}{32}$, то ввиду того, что $|\varphi_2| < \frac{1}{1156}$, легко видно, что убывание членов ряда (9), соответствующего системе (28), происходит намного быстрее, чем предусмотрено теоремой 2.

В заключение выражаю большую и искреннюю благодарность А. М. Самойленко за помощь и интерес к выполнению данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. А. Митропольский, Е. П. Белан, О построении решений почти диагональных систем линейных дифференциальных уравнений с помощью метода, обеспечивающего ускоренную сходимость, УМЖ, т. 20, № 2, 1968.
2. Н. П. Еругин, Приводимые системы, Труды Математического *института* им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 13, 1946.
3. И. М. Рапопорт, О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд-во АН УССР, К., 1954.

Поступила 28.XI 1969 г.,
после переработки — 7.II 1972 г.
Институт математики АН УССР