УДК 517.947.35

К вопросу о спектре некоторого псевдодифференциального оператора

М. А. Рыбак

Пусть Ω_0 — полоса $(-\infty, \infty) \times [-1, 0]$ в двумерном евклидовом пространстве R_2, нижнюю границу которой $(y = -1)$ обозначим через Γ_1, а верхнюю $(y = 0)$ — Γ_0. Через Ω обозначим возмущенную полосу в R_2, полученную из Ω_0 локальным возмущением Γ_0, т. е. граница области Ω состоит из Γ_1 и кривой Γ, уравнение которой $y = \alpha(x)\,(x \in (-\infty, \infty))$, где $\alpha(x)$ — дважды дифференцируемая финитная функция, при этом предполагается, что $|\alpha(x)| < 1$.

Рассмотрим в пространстве $L_2(\Gamma_1)$ оператор A'

$$(A'\varphi)(x) = \left.\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n}\right|_{(x,y)\in\Gamma_1} = -\left.\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y}\right|_{y=-1},$$

где $\varphi(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая финитная функция, а $\Phi(x, y)$ — решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа

$$\Delta \Phi(x, y) = 0, \quad \Phi(x, y)|_{(x,y)\in\Gamma_1} = \varphi(x), \quad \Phi(x, y)|_{(x,y)\in\Gamma} = 0 \qquad (1)$$

в области Ω, которое существует и единственно (см., например, [1]). Как будет показано, оператор A' допускает замыкание A в $L_2(\Gamma_1)$, которое является самосопряженным оператором. Соответствующие операторы, построенные для области Ω_0, обозначим через A_0' и A_0. В данной заметке исследуется спектр оператора A.

Лемма. *Оператор A_0 — самосопряженный, положительный, спектр его непрерывен и заполняет отрезок* $[1, \infty)$.

Доказательство. Переходя к преобразованию Фурье по переменной x в задаче (1) для области Ω_0, а затем решая полученную задачу для обыкновенного дифференциального уравнения по y и переходя к обратному преобразованию Фурье, получим, что

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}\lambda y}{\operatorname{sh}\lambda}\,\tilde{\varphi}(\lambda)\,e^{i\lambda x}\,dx,$$

где $\tilde{\varphi}(\lambda) = U\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,e^{-i\lambda x}dx$, откуда $A_0'\varphi = U^{-1}CU\varphi$; здесь C — оператор умножения на функцию $\lambda \operatorname{cth} \lambda$ в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$. Это означает, что оператор A_0 унитарно эквивалентен оператору умножения на функцию $\lambda \operatorname{cth}\lambda$, а потому самосопряжен и положителен. Так как областью значений функции $\lambda \operatorname{cth} \lambda$ служит отрезок $[1, \infty)$, то (см. [2]) спектр оператора A_0 совпадает с этим отрезком.

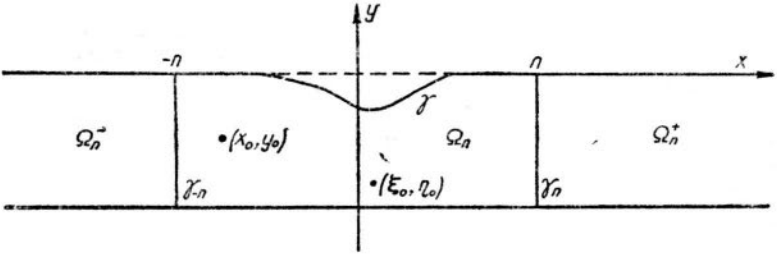
Теорема. *Оператор A допускает представление $A = A_0 + B$, где B — интегральный оператор в пространстве $L_2(\Gamma_1)$ с непрерывным ядром $B(s, t) = B(t, s)$, удовлетворяющим оценке*

$$|B(s, t)| \leqslant Ce^{-(|s| + |t|)} \quad (-\infty < s, t < \infty).$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы разобьем на два этапа.

1. Обозначим через $G_0(x, y, \xi, \eta)$ и $G(x, y, \xi, \eta)$ функции Грина для первой краевой задачи уравнения Лапласа в областях Ω_0 и Ω соответственно. По теореме Браудера [3] функции G_0 и G при фиксированных ξ, η интегрируемы с квадратом соответственно в областях Ω_0 и Ω. Так как функция

$$f_\zeta(z) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\eta - y) + i\frac{\pi}{2}(x-\xi)\right]\cdot \sin\left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\eta\right) - i\frac{\pi}{2}\xi\right]}{\sin\left[-\frac{\pi}{2}(\eta + y) + i\frac{\pi}{2}(x-\xi)\right]\cdot \sin\left[\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\eta\right) + i\frac{\pi}{2}\xi\right]}$$



($z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$) является функцией Римана, осуществляющей конформное отображение полосы Ω_0 на единичный круг, то (см. [1])

$$G_0(x, y, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|f_\zeta(z)|}, \qquad \frac{\partial G_0(x, y, \xi, \eta)}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\ln\frac{1}{|f_\zeta(z)|} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{\sin\pi\eta}{\sin\left[-\frac{\pi}{2}(\eta + y) + i\frac{\pi}{2}(x-\xi)\right]\cdot\sin\left[\frac{\pi}{2}(\eta - y) + i\frac{\pi}{2}(x-\xi)\right]}$$

и

$$\frac{\partial^2 G_0(x, y, \xi, \eta)}{\partial y^2} = \frac{\pi}{8}\,\frac{\sin\pi\eta\cdot\sin[-\pi y + i\pi(x-\xi)]}{\sin^2\left[-\frac{\pi}{2}(\eta + y) + i\frac{\pi}{2}(x-\xi)\right]\cdot\sin^2\left[\frac{\pi}{2}(\eta - y) + i\frac{\pi}{2}(x-\xi)\right]}.$$

Из этих формул следует, что если переменные y, ξ и η пробегают конечную область, а x уходит на ∞, то справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial G_0(x, y, \xi, \eta)}{\partial y}\right| \leqslant C_1 e^{-\pi|x|}, \qquad \left|\frac{\partial^2 G_0(x, y, \xi, \eta)}{\partial y^2}\right| \leqslant C_2 e^{-\pi|x|} \tag{2}$$

(константы C_1 и C_2 зависят от области, в которой изменяются y, ξ, η). Такие же оценки имеют место и в том случае, когда x, y, η изменяются в конечной области, а ξ уходит на ∞.

2. Обозначим через $u(\xi, \eta) = G_0(x_0, y_0, \xi, \eta)$, $v(\xi, \eta) = G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$, где (x_0, y_0) и (ξ_0, η_0) — произвольные точки, лежащие внутри Ω_n. Учитывая, что $\Delta u(\xi, \eta) = \delta_{(x_0, y_0)}(\xi, \eta)$, $\Delta v(\xi, \eta) = \delta_{(\xi_0, \eta_0)}(\xi, \eta)$ и применяя формулу Грина для области Ω_n, которая изображена на рисунке, получим, что

$$G(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0) - G_0(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0) = -\int_\gamma G_0(x_0, y_0, \xi, \eta)\times$$

$$\times\frac{\partial G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)}{\partial n}\,ds + \int_{\gamma_n + \gamma_{-n}}\left[G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)\frac{\partial G_0(x_0, y_0, \xi, \eta)}{\partial n} -\right.$$

$$\left. - G_0(x_0, y_0, \xi, \eta)\frac{\partial G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)}{\partial n}\right] ds. \tag{3}$$

Отсюда видно, что последнее слагаемое в формуле (3) постоянно и не зависит от n. Покажем, что при $n \to \infty$ оно стремится к нулю.

Достаточно показать это для $\int\limits_{\gamma_n}$, так как для $\int\limits_{\gamma_{-n}}$ это доказывается также. Так как функции $G_0(x_0, y_0, \xi, \eta)$ и $G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ в области Ω_n^+ интегрируемы с квадратом по переменным ξ, η и удовлетворяют там уравнению $\Delta u = 0$, то аналогично тому, как это делается в [4, стр. 90], можно показать, что $|\nabla G_0(x_0, y_0, \xi, \eta)|$ и $|\nabla G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)|$ интегрируемы с квадратом в Ω_n^+. Отсюда следует, что существует последовательность контуров γ_n такая, что

$$\int\limits_{\gamma_n} \left| G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0) \frac{\partial G_0(x_0, y_0, \xi, \eta)}{\partial n} - G_0(x_0, y_0, \xi, \eta) \frac{\partial G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)}{\partial n} \right| ds \to 0$$

при $n \to \infty$, т. е. последнее слагаемое в (3) равно нулю, и приходим к формуле

$$G(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0) - G_0(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0) = -\int\limits_{\gamma} G_0(x_0, y_0, \xi, \eta) \frac{\partial G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)}{\partial n} ds, \tag{4}$$

которая показывает, что функция, стоящая в левой части (4), является дважды непрерывно дифференцируемой в области Ω, включая и границу Γ_1.

Из формулы (4) имеем:

$$\frac{\partial G(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)}{\partial n} - \frac{\partial G_0(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)}{\partial n} = -\int\limits_{\gamma} \frac{\partial G_0(x_0, y_0, \xi, \eta)}{\partial n} \cdot \frac{\partial G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)}{\partial n} ds, \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 G(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 G(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)}{\partial n^2} = -\int\limits_{\gamma} \frac{\partial^2 G_0(x_0, y_0, \xi, \eta)}{\partial n^2} \cdot \frac{\partial G(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)}{\partial n} ds. \tag{6}$$

Учитывая теперь оценки (2), из (5) непосредственно получаем, что

$$\left| \frac{\partial G(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)}{\partial n} \right| \leqslant C_3 e^{-\pi|x_0|}, \tag{7}$$

где y_0, ξ_0, η_0 пробегают конечную область, а x_0 уходит на ∞. Такую же оценку можно получить, когда x_0, y_0, η_0 пробегают конечную область, а ξ_0 уходит на ∞.

Из (7) и (6) вытекает, что

$$|B(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)| = \left| \frac{\partial^2 G(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)}{\partial n^2} - \frac{\partial^2 G(x_0, y_0, \xi_0, \eta_0)}{\partial n^2} \right| \leqslant C e^{-\pi(|x_0| + |y_0|)}. \tag{8}$$

Исходя теперь из определения операторов A_0' и A', заключаем, что их разность является интегральным оператором с ядром $B(x, -1, \xi, -1)$. Благодаря оценке (8) находим, что $A - A_0$ — ядерный оператор. Теорема доказана.

Следствие. *Оператор A самосопряжен, полуограничен снизу, его непрерывный спектр заполняет отрезок* $[1, \infty)$, *а абсолютно непрерывная часть спектра оператора A совпадает с абсолютно непрерывной частью спектра оператора A_0.*

Это следствие вытекает из ядерности оператора B, теоремы Г. Вейля и теоремы Розенблюма — Като о возмущениях самосопряженных операторов (см., например. [5]).

Заметим, что полученные результаты можно установить также для локально возмущенных областей (не обязательно полосы), если известны оценки, подобные (2), для функции Грина в случае невозмущенной области, причем роль функции $e^{-\pi|x|}$ может играть любая функция $\rho(x)$, интегрируемая с квадратом на всей числовой оси. Обобщение можно провести также и для случая, когда область рассматривается в трехмерном пространстве. Так, например, для слоя в трехмерном пространстве функция Грина G_0 выписана в явном виде в [6], из которого можно получить нужные оценки и доказать аналогичную теорему для локально возмущенного слоя.

В заключение выражаю благодарность Ю. М. Березанскому за постановку задачи.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Методы теории функций комплексного переменного, «Наука», М., 1965.
2. Н. Данфорд, Дж. Шварц, Линейные операторы, т. 2, ИЛ, М., 1966.
3. К. Морен, Методы гильбертова пространства, ИЛ, М., 1965.
4. И. М. Глазман, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, Физматгиз, М., 1963.
5. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», М., 1966.
6. Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов, Сборник задач по математической физике, Гостехиздат, М, 1956.
7. В. С. Владимиров, Уравнения математической физики, «Наука», М., 1967.

Поступила 28.VII 1971 г.
Киевский торгово-экономический институт