УДК 517.9

О сильной разрешимости обобщенной задачи Трикоми

Н. Г. Сорокина

Пусть $k(y)$ — непрерывно дифференцируемая функция, причем $k(y)\,y \geqslant 0$; G — двумерная область точек (x, y), пересекающаяся с осью $\overrightarrow{0x}$ по отрезку S_1S_2. Уравнение Чаплыгина

$$\mathfrak{L}u \equiv k(y)\,u_{xx} - u_{yy} = f(x, y) \tag{1}$$

эллиптично в области $G \cap (y < 0)$ и гиперболично в области $G \cap (y > 0)$. Рассмотрим граничную задачу для уравнения (1). В доказательстве теоремы, приведенной ниже, используются методы работ [1—3] и работы автора [4].

Пусть граница Γ области G кусочно-гладкая кривая $\Gamma = \Gamma_0 \cup \gamma$, где γ — кусок характеристики выражения $\mathfrak{L}$, вдоль которой $\sqrt{k}\,dy = -dx$ Кривая Γ_0 дважды непрерывно дифференцируема и нигде не характеристична, причем $\dfrac{dy}{dx} < \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ вдоль ее участка, расположенного в гиперболической полуплоскости. Обозначим через h ординату точки пересечения характеристик, огибающих область G и расположенных для удобства симметрично относительно оси $\overrightarrow{0y}$, $n = (n_x, n_y)$ — внешняя нормаль к Γ. Дополнительно предположим, что вдоль участка $\Gamma_0^1 = \Gamma_0 \cap (n_x \geqslant 0)$ $\dfrac{dy}{dx} < \dfrac{1}{\sqrt{k(h)}}$ $x - y \geqslant 0$; вдоль $\Gamma_0^2 = \Gamma_0 \cap (n_y \geqslant 0)$ $\dfrac{dy}{dx} > \dfrac{1}{\sqrt{k(h)}}$, $x - y \leqslant 0$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y=0} < \infty$. вдоль

$\Gamma_0 \setminus (\Gamma_0^1 \cup \Gamma_0^2)\ \dfrac{dy}{dx} \leqslant 0$. Для функций u из соболевского пространства $W_2^2(G)$ поставим граничное условие

$$u|_{\Gamma_0} = 0. \tag{2}$$

Определение 1. Пусть функция $f(x, y) \in L_2(G)$. Функция $u \in L_2(G)$ называется сильным решением обобщенной задачи Трикоми, если существует последовательность функций $u_n \in W_2^2(G)$, удовлетворяющих граничному условию (2), такая, что $\| u_n - u \| \to 0$, $\| \mathfrak{L} u_n - f \| \to 0$ при $n \to \infty$ в смысле сходимости по норме пространства $L_2(G)$.

Легко убедиться, что сопряженным граничным условием к (2) будет условие

$$v|_{\Gamma} = 0, \tag{3}$$

так что $(\mathfrak{L}u, v) = (u, \mathfrak{L}v)$ для функций $u, v \in W_2^2(G)$, удовлетворяющих соответственно граничным условиям (2), (3).

Определение 2. Функция $u \in L_2(G)$ называется слабым решением обобщенной задачи Трикоми, если имеет место равенство $(u, \mathfrak{L}v) = (f, v)$. для каждой функции $v \in W_2^2(G)$, удовлетворяющей граничному условию (3),

С использованием оценок [4, §1] и рассуждений этого параграфа опирающихся на результаты работ [1—3], нетрудно доказать такую теорему.

Теорема. *Для функций $u \in W_2^2(G)$, удовлетворяющих граничному условию (2), имеет место неравенство*

$$\| \mathfrak{L} u \| \geqslant c \| u \|_{W_2^1(G)} \quad (c > 0). \tag{4}$$

При любой функции $f \in L_2(G)$ существует единственное сильное решение обобщенной задачи Трикоми. Это решение принадлежит соболевскому пространству $W_2^1(G)$: существует последовательность функций $u_n \in W_2^2(G)$, удовлетворяющих граничному условию (2), такая, что $\| u_n - u \|_{W_1^2(G)} \to 0$, $\| \mathfrak{L} u_n - f \| \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Сопоставим граничной задаче (1), (2) граничную задачу для системы дифференциальных уравнений первого порядка, полагая $u_x = u_1$, $u_y = u_2$, $\hat{u} = (u_1, u_2)$, $\hat{f} = (f_1, f_2)$:

$$\hat{\mathfrak{L}} \hat{u} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = \hat{f}(x, y) \in \hat{L}_2(G). \tag{5}$$

$\| \hat{f} \|_{\hat{L}_2(G)} = \| \hat{f} \| = \int\limits_G (f_1^2 + f_2^2)\, dx dy$. Граничному условию (2) соответствует условие для функций $\hat{u} = (u_1, u_2)$

$$(u_1 n_y - u_2 n_x)|_{\text{l}} = 0 \quad (u_1, u_2 \in W_2^1(G)). \tag{6}$$

Система уравнений (5) соответствует уравнению (1), если $\hat{f} = (f, 0)$. Сопряженным граничным условием к (6) будет условие

$$v_1|_{\text{l}} = 0, \ (v_1 n_y - v_2 n_x)|_{\gamma} = 0 \quad (v_1, v_2 \in W_2^1(G)). \tag{7}$$

Следуя [4] легко убедиться, что если функции $b(x, y)$, $c(x, y)$ взять по формулам

$$b = 1 - 2\sigma x, \quad c = h/l - \sigma(y - x) \quad (l = (1 + \varepsilon)\sqrt{k(h)}, \ \varepsilon, \sigma > 0 \text{ малы}).$$

как в доказательстве леммы 1 [4], система уравнений (5) сводится к положительно симметричной в терминологии К. Фридрихса вида

$$Z\hat{\mathfrak{L}}\hat{u} \equiv \hat{K}\hat{u} = \hat{f},$$

где матрица $Z = 2\begin{pmatrix} b & ck \\ c & b \end{pmatrix}$ невырождена в области G При этом на границе Γ, благодаря ее специальной форме, «положительны» как основные граничные условия (6), связанные с выражением

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} bk & ck \\ ck & b \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} - \begin{pmatrix} ck & b \\ b & c \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y},$$

так и сопряженные к ним

$$(bv_1 + cv_2)|_{\Gamma_0} = 0, \quad (v_1 n_y - v_2 n_x)|_{\gamma} = 0 \quad (v_1, v_2 \in W_2^1(G)). \tag{8}$$

Это означает: почти везде на границе Γ справедливы неравенства

$$\langle \hat{u}, \beta\hat{u} \rangle \geqslant 0, \quad \langle \hat{v}, -\beta\hat{v} \rangle \geqslant 0$$

для функций $\hat{u}$, $\hat{v}$, удовлетворяющих соответственно граничным условиям (6), (8), где $\langle \hat{u}, \hat{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$, матрица $\beta = \begin{pmatrix} bk & ck \\ ck & b \end{pmatrix} n_x - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} n_y$. Отсюда следует, что для таких $\hat{u}$, $\hat{v}$ справедливы неравенства

$$\| \hat{K}\hat{u} \| \geqslant c_1 \| \hat{u} \|, \quad \| \hat{K}^+\hat{v} \| \geqslant c_1 \| \hat{v} \| \tag{9}$$

с некоторой постоянной $c_1 > 0$ ($\hat{K}^+$ — формально сопряженное к $\hat{K}$ дифференциальное выражение [2, 4]). В силу невырожденности матрицы Z из неравенств (9) следуют неравенства

$$\| \hat{\mathfrak{L}}\hat{u} \| \geqslant c_2 \| \hat{u} \|, \quad \| \hat{\mathfrak{L}}^+\hat{v} \| \geqslant c_2 \| \hat{v} \| \quad (c_2 > 0) \tag{10}$$

для функций $\hat{u}$, удовлетворяющих граничным условиям (6), удовлетворяющих условиям (7) ($\hat{\mathfrak{L}}^+ = -\hat{\mathfrak{L}}$ формально сопряженное к $\hat{\mathfrak{L}}$ дифференциальное выражение). При этом второе неравенство (10) получается из неравенств $\| \hat{K}^+\hat{v} \| = \| \hat{\mathfrak{L}} Z'\hat{v} \| \geqslant c_2 \| \hat{v} \| \geqslant c_3 \| Z'\hat{v} \|$, если заметить, что преобразование Z' переводит функции, удовлетворяющие условиям (8) в функции, удовлетворяющие условиям (7) (взаимно однозначно).

Из первого неравенства (10) следует неравенство (4). Из второго неравенства (10) следует, что задача (5), (6) имеет слабое решение: при любой функции $\hat{f} \in \hat{L}_2(G)$ существует функция $\hat{u} \in \hat{L}(G)$, для которой $(\hat{u}, \mathfrak{L}^+\hat{v}) = (\hat{f}, \hat{v})$ для любой функции $\hat{v}$, удовлетворяющей условиям (7). Тот факт, что это слабое решение как и всякое слабое решение задачи (5), (6), на самом деле является сильным, устанавливается аналогично [4]: существует последовательность функций $\hat{u}_n = (u_{1,n}, u_{2,n})$, $u_{1,n}, u_{2,n} \in W_2^1(G)$, удовлетворяющих граничному условию (6), такая, что $\|\hat{u}_n - \hat{u}\| \to 0$, $\| \hat{\mathfrak{L}}\hat{u}_n - \hat{f} \| \to 0$ при $n \to \infty$. Для доказательства достаточно указать подходящее разложение единицы для области G, фигурирующее в доказательстве леммы 1 [4]. Разложение единицы следует взять для такого покрытия области G подобластями G_i $G = \bigcup_{i=1}^{r} G_i$, для которого после гладкого распрямления участка Γ_i кривой Γ_0, примыкающего к некоторой области G_i покрытия, локальную граничную задачу в такой подобласти можно было бы в н овых переменных привести к виду $\left\{\frac{\partial}{\partial y'}+\hat{M}\left(x', y', \frac{\partial}{\partial x'}\right)\right\}\hat{u}=\hat{f}_i,\ u_1|_{y'=1}=$ $=0$ $\left(\text{дифференциальное выражение } \hat{M}\left(x', y', \frac{\partial}{\partial x'}\right)\right.$ содержит только дифференцирование по касательной переменной x', участок Γ_i переходит в $\left. y'=1\right)$. Достаточно взять все подобласти G_i, примыкающие к Γ_0, достаточно малыми за исключением подобласти G_3, примыкающей к углу на границе Γ вблизи точки S_3. Подобласть G_3 возьмем узкой вытянутой вдоль характеристики γ до пересечения с подобластью G_2, примыкающей к углу на γ вблизи точки S_2. Подходящим локальным отображением G_3 в полуполосу $(0\leqslant x'<\infty,\ 0<y'\leqslant 1)$ служит, например,

$$x'=\frac{1}{H}(\gamma(y)-x),\quad y'=\frac{1}{H}(f(x)-y)+1\quad (\mathrm{const}=H\rangle\rangle),$$

$x=\gamma(y)$ — уравнение γ, $y=f(x)$ — уравнение Γ_0, продолженной для $x\in$ $\in S_1S_2$, $\frac{df}{dx}<\frac{1}{\sqrt{k(h)}}$.

Пусть $\hat{u}$ — сильное решение задачи (5), (6), $\hat{u}_n=(u_{1,n}, u_{2,n})$ — соответствующая приближающая последовательность, $\hat{f}=(f,0)$. Аналогично [4], сильный предел последовательности $\psi_n=\int\limits_{\Gamma_0^3(x)}^{y}u_{2,n}dy'$ $(y=\Gamma_0^3(x)$ — уравнение $\Gamma_0\bigcap(n_y\leqslant 0))$ принадлежит пространству $W_2^1(G)$ и является слабым решением обобщенной задачи Трикоми. Тот факт, что это слабое решение на самом деле является сильным, устанавливается аналогично случаю задачи Трикоми, если использовать приведенное выше разложение единицы для области G.

Единственность сильного решения следует из неравенства (4). Теорема доказана.

В отличие от задачи Трикоми, обобщенная задача Трикоми не будет нормально разрешимой. Действительно, граничное условие (3) сопряженной граничной задачи сильнее, чем граничное условие (2) основной задачи. Всякое сильное решение сопряженной граничной задачи $\mathfrak{L}v=g$, $v|_\Gamma=0$ является и сильным решением основной задачи при той же правой части уравнения. Если бы сопряженная граничная задача была сильно разрешима при любой правой части уравнения из пространства $L_2(G)$, то всякое сильное решение основной задачи, в силу единственности, обращалось бы в нуль на γ, что, очевидно, неверно. Для обобщенной задачи Трикоми единственность слабых решений не имеет места. Как сообщил мне А. М. Нахушев, этот факт неединственности слабых решений обобщенной задачи Трикоми был независимо замечен В. В. Коврижкиным.

ЛИТЕРАТУРА

1. K. O. Friedrichs, The identity of weak and strong extensions for dissipative symmetric linear differential operators, Trans. American Math. Soc., 55, 1944.
2. K. O. Friedrichs, Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure a. Appl. Math., 11, 3, 1958.
3. P. D. Lax, R. S. Phillips, Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, Comm. Pure a. Appl. Math., 13, 3, 1960.
4. Н. Г. Сорокина, О сильной разрешимости задачи Трикоми, УМЖ, т. 18, № 6, 1966.

Поступила 25.II 1971 г.
Институт гидромеханики АН УССР