УДК 519.3:51:62—50

О решении одного класса задач уклонения

И. В. Бейко, З. М. Шпортюк

Рассматривается задача о максимуме времени уклонения от встречи двух управляемых объектов в следующей постановке. Пусть движение объектов описывается системами линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dt} = C(t)y + D(t)v, \quad y(0) = y_0, \tag{2}$$

где x, y — n-мерные векторы фазовых координат преследующего и преследуемого объектов соответственно; $A(t)$, $C(t)$ — $(n \times n)$,-B (t), $D(t)$ — $(n \times r)$-матрицы, непрерывные по t; u, v — r-мерные векторы управлений, удовлетворяющие в каждый момент времени t ограничениям:

$$u(t) \in U, \qquad v(t) \in V, \tag{3}$$

где U, V — ограниченные, замкнутые и выпуклые множества.

Обозначим через $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$ — управления, взятые как элементы пространства измеримых функций, удовлетворяющих в каждый момент времени t ограничениям (3); соответствующие этим управлениям траектории обозначим через $x(\cdot, u)$ и $y(\cdot, v)$, а точки этих траекторий в момент времени t — $x(t, u)$ и $y(t, v)$.

Будем говорить, что преследуемый, движущийся по траектории $y(\cdot, v)$, уклоняется от встречи с преследователем до момента времени t_1, если для всех $t \in [0, t_1]$

$$\| x_y(t, u) - y(t, v) \| \geqslant \rho, \tag{4}$$

где $x_y(t, u)$ определяется соотношением

$$\| x_y(t, u) - y(t, v) \| = \min_{u(\cdot)} \| x(t, u) - y(t, v) \|.$$

Для произвольного управления $v(\cdot)$ время $T(v)$ назовем временем уклонения от встречи, если для всех $t \in [0, T(v)]$ выполняется условие (4) и существует такое $\varepsilon_1 > 0$, что для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ и всех $t \in (T(v), T(v) + \varepsilon)$ $\| x_y(t, u) - y(t, v) \| < \rho$. Задача состоит в отыскании управления $v^0(\cdot)$, удовлетворяющего соотношению

$$T(v^0) = \max_{v(\cdot)} T(v). \tag{5}$$

Управление $v^0(\cdot)$, доставляющее максимум в (5), будем называть оптимальным.

Сформулированная выше задача отличается от рассматриваемой в [1—3] задачи о максимине времени до встречи двух управляемых объектов тем, что в упомянутых работах $T(v)$ означает первый момент времени, когда расстояние от преследователя до преследуемого, движущегося по траектории $y(\cdot, v)$, равно ρ.

Отметим, что, решая последовательность задач (5) с $\rho = \rho_n \to 0$, можно найти время уклонения, как угодно мало отличающееся от $\sup\limits_{v(\cdot)} T(v)$ для $T(v)$, определенного согласно [1].

В данной работе получены необходимые условия оптимальности управления для задачи (5) и предложен алгоритм ее решения.

Обозначим через $X(t)$ множество достижимости [3] системы (1) в момент времени $t > 0$. Пусть c — произвольный вектор с ненулевой нормой n-мерного евклидового пространства. Положим

$$(c, x(t, u_c)) = \max_{x \in X(t)} (c, x). \tag{6}$$

Выберем произвольное управление $v_1(\cdot)$ преследуемой системы и для $y(t, v_1)$ рассмотрим функцию

$$F(t, y(t, v_1)) = \min_{\|c\| \leqslant 1} (c, x(t, u_c) - y(t, v_1)) = (c_t(y(t, v_1)), x(t, u_c) - y(t, v_1)). \tag{7}$$

Из теоремы 1.5 работы [3] следует, что $F(t, y(t, v_1))$ для $y \overline{\in} X(t)$ совпадает с расстоянием, взятым с отрицательным знаком, от множества $X(t)$ до точки $y(t, v_1)$. На основании теоремы 1.6 и следствия к теореме 1.2 той же работы [3] можно утверждать, что в точках, где функция $F(t, y(t, v_1)) < 0$, она непрерывно дифференцируема по y, а значит, и по $v_1(\cdot)$, причем $F'_y(t, y(t\ v_1)) = -c_t(y,(t, v_1))$, а $F'_{v_1(\tau)}(t, y(t, v_1)) = D^*(\tau)\varphi_t(\tau)$, где $D^*(\tau)$ — сопряженная к $D(\tau)$ матрица; $\varphi_t(\tau)$ — решение на $[0, t]$ системы

$$\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = -C^*(\tau)\varphi(\tau), \qquad \varphi(t) = -c_t(y(t, v_1)). \tag{8}$$

При этом вектор $c_t(y(t, v_1))$ единственен, $\|c_t\| = 1$, и непрерывно зависит от t и $y(t, v_1)$. Кроме того, функция $F(t, y(t, v_1))$ почти всюду имеет производную по t, причем

$$\frac{dF}{dt} = (c_t(y(t, v_1)), A(t)x_c(t) + B(t)u_c(t) - C(t)y(t, v_1) - D(t)v_1(t)), \tag{9}$$

где $u_c(t)$ — управление, удовлетворяющее условию (6), $x_c(t) = x(t, u_c)$.

Пусть для всех допустимых управлений $v(\cdot)$

$$0 < T(v) \leqslant K < \infty. \tag{10}$$

Обозначим через Q множество всех допустимых управлений преследуемого на $[0, K]$, т. е. $Q = \{v(\cdot) \in L_2[0, K] : v(t) \in V$ для всех $t \in [0, K]\}$, и на множестве Q определим функционал

$$f(v, v_1) = \max_{t \in [0, T(v_1)]} F(t, y(t, v)), \tag{11}$$

где $T(v_1)$ — время уклонения от встречи.

Теорема 1. *Функционал $f(v, v_1)$ слабо непрерывен по $v(\cdot)$ на Q и в области $Q(v_1) = \{v(\cdot) \overline{\in} Q : F(t, y(t, v)) \leqslant -\rho\ \forall\ t \in [0, T(v_1)]\}$ дифференцируем по направлению, причем производная в точке $v(\cdot)$ по направлению $\bar{v}(\cdot)$ равна*

$$f'_{\bar{v}}(v, v_1)(\bar{v}) = \max_{t \in M(v)} (-c_t(y(t, v)), \bar{y}(t, \bar{v})) = \max_{t \in M(v)} \int_0^t (\varphi_t(\tau), D(\tau)\bar{v}(\tau))\, d\tau, \tag{12}$$

где $M(v) = \{t \in [0, T(v_1)] : f(v, v_1) = F(t, y(t, v))\}$, $\bar{y}(t, \bar{v})$ — *решение системы* $\dfrac{d\bar{y}}{dt} = C(t)\bar{y} + D(t)\bar{v}, \bar{y}(0) = 0$; $\varphi_t(\tau)$ — *решение на* $[0, t]$ *системы* (9), $\varphi_t(\tau) \equiv 0$ *для* $\tau > t$.

Доказательство этой теоремы приводится в [4].

С л е д с т в и е. *Функционал $f(v, v_1)$ достигает на множестве Q своего наименьшего значения.*

Доказательство следует из того факта, что множество Q слабо компактно в $L_2[0, K]$ в силу ограниченности множества V и слабо замкнуто в силу его выпуклости и замкнутости.

Л е м м а. *Если существует управление $v_2(\cdot) \in Q$, для которого $f(v_2, v_1) < -\rho$, то время уклонения от встречи больше, чем $T(v_1)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $t(v_2)$ первый положительный корень уравнения $F(t, y(t, v_2)) + \rho = 0$. По определению функции $F(t, y(t, v))$, $t(v_2)$ — время быстродействия для преследователя при попадании в ρ-окрестность точки $y(t(v_2), v_2)$. Покажем, что $T(v_2) > T(v_1)$. Так как $F(t, y(t, v_2)) < -\rho$ для всех $t \in [0, T(v_1)]$, то $t(v_2) > T(v_1)$, а так как $T(v_2) \geqslant t(v_2)$, то $T(v_2) > T(v_1)$. Лемма доказана.

Из определения оптимального управления следует утверждение.

У т в е р ж д е н и е. Для того чтобы управление $v_1(\cdot) \in Q$ было оптимальным, необходимо, чтобы выполнялось следующее соотношение:

$$\min_{v(\cdot)\in Q} f(v, v_1) = f(v_1, v_1) = -\rho.$$

Из сформулированного утверждения и дифференцируемости по направлению функционала $f(v, v_1)$ вытекает доказательство необходимых условий оптимальности управления $v_1(\cdot) \in Q$, т. е. такая теорема.

Т е о р е м а 2. *Для оптимальности управления $v_1(\cdot) \in Q$ необходимо, чтобы выполнялось следующее условие*:

$$\max_{t\in M(v_1)} (-c_t(y(t, v_1)), y(t, v) - y(t, v_1)) \geqslant 0 \tag{13}$$

для всех $v(\cdot) \in Q$ или, что то же самое,

$$\min_{v(\cdot)\in Q} \max_{t\in M(v_1)} (-c_t(y(t, v_1)), y(t, v) - y(t, v_1)) = 0, \tag{14}$$

где $v_1(\cdot)$ удовлетворяет соотношению $f(v_1, v_1) = -\rho$. Управление $v_1(\cdot) \in \in Q$, удовлетворяющее соотношениям (13) или (14), назовем стационарным.

Приведем алгоритм, который позволяет в некотором смысле отыскивать стационарные управления.

Будем предполагать, что для любого управления $v_1(\cdot) \in Q$, умеем определять функцию $f(v, v_1)$.

Выберем некоторое произвольное положительное число $\varepsilon_1 > 0$. Управление $v^1(\cdot) \in Q$ выбираем произвольно.

Пусть уже найдено управление $v^n(\cdot) \in Q$, время уклонения $T(v^n)$, число $\varepsilon_n > 0$.

Положим

$$\delta_n(0) = \min_{v\in Q} \max_{t\in M(v^n)} (-c_t(y(t, v^n)), y(t, v) - y(t, v^n)).$$

Если $\delta_n(0) = 0$, то $v^n(\cdot)$ — стационарное управление. Если же $\delta_n(0) < 0$, то вычислим

$$\delta_n(\varepsilon_n) = \min_{v\in Q} \max_{t\in M(v^n, \varepsilon_n)} (-c_t(y(t, v^n)), y(t, v) - y(t, v^n)) =$$

$$= \max_{t\in M(v^n, \varepsilon_n)} (-c_t(y(t, v^n)), y(t, \bar{v}^n) - y(t, v^n)).$$

Здесь $M(v^n, \varepsilon_n) = \{t \in [0, T(v^n)] : F(t, y(t, v^n)) + \rho \geqslant -\varepsilon_n\}$.

Положим

$$v^{n+1}(\cdot) = v^n(\cdot) + \alpha_n(\bar{v}^n(\cdot) - v^n(\cdot)), \tag{15}$$

где α_n удовлетворяет соотношению

$$f(v^n + \alpha_n(\bar{v}^n - v^n), v^n) = \min_{\alpha\in[0,1]} f(v^n + \alpha(\bar{v}^n - v^n), v^n). \tag{16}$$

Если $\delta_n(\varepsilon_n) < -\varepsilon_n$, то положим $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n$, если же $-\varepsilon_n \leqslant \delta_n(\varepsilon_n) \leqslant 0$, то полагаем $\varepsilon_{n+1} = \frac{\varepsilon_n}{2}$. Так как

$$\delta_n = \max_{t\in M(v^n)} (-c_t(y(t, v^n)), y(t, \bar{v}^n) - y(t, v^n)) \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t\in M(v^n,\varepsilon_n)} (-c_t(y(t, v^n)), y(t, \bar{v}^n) - y(t, v^n)) = \delta_n(\varepsilon_n) \leqslant 0,$$

то $f(v^{n+1}, v^n) \leqslant -\rho$. Согласно лемме имеем: $T(v^{n+1}) \geqslant T(v^n)$. В предположении, что последовательность $v^n(\cdot)$ бесконечна, справедлива такая теорема.

Т е о р е м а 3. *Построенная последовательность* (15) *управлений* $v^n(\cdot)$ *такова, что*:

1) $\lim_{n\to\infty} T(v^n) = T^*$;

2) $\lim_{n\to\infty} \delta_n(\varepsilon_n) = \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как последовательность $T(v^n)$ ограничена сверху и монотонно возрастает, то существует предел $\lim_{n\to\infty} T(v^n) = T^* \leqslant \leqslant K$, и первое утверждение доказано.

Докажем второе утверждение теоремы. Для удобства обозначим

$$y^n(\cdot) = y(\cdot, v^n),\ \bar{y}^n(\cdot) = y(\cdot, \bar{v}^n),\ T(v^n) = t_n.$$

Последовательность ε_n монотонно убывает и ограничена снизу. Поэтому существует предел $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = \varepsilon^* \geqslant 0$. Пусть $\varepsilon^* > 0$. Тогда, начиная с некоторого номера N, $\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1} = \varepsilon^*$ и

$$\delta_n \leqslant \delta_n(\varepsilon_n) = \max_{t\in M(v^n,\varepsilon_n)} (-c_t(y^n), \bar{y}^n(t) - y^n(t)) < -\varepsilon^*$$

для всех $n \geqslant N$. Так как $F(t, y)$ непрерывная функция y, а множество траекторий $y(\cdot, v)$, $v(\cdot) \in Q$ есть компакт, то $F(t, y(t, v))$ — равномерно непрерывная функция y. Поэтому найдется такое $\bar{\alpha}_1 \in (0, 1)$, что для всех $\alpha \in (0, \bar{\alpha}_1]$ и всех n

$$\max_{t\in[0,t_n]} F(t, y^n(t) + \alpha(\bar{y}^n(t) - y^n(t))) = \max_{t\in M(v,^n\varepsilon_n)} F(t, y^n(t) + \alpha(\bar{y}^n(t) - y^n(t))).$$

Вследствие непрерывной дифференцируемости по y функции $F(t, y)$ найдется такое $\bar{\alpha}_2 \in (0, 1)$, что для всех $\bar{\alpha} \in (0, \bar{\alpha}_2]$ и $t \in [0, t_n]$ и всех n

$$F(t, y^n(t) + \alpha(\bar{y}^n(t) - y^n(t)) = F(t, y^n(t)) + \alpha(-c_t(y^n), \bar{y}^n(t) - y^n(t)) +$$

$$+ \Theta_n(\alpha) \leqslant F(t, y^n(t)) - \alpha(c_t(y^n), \bar{y}^n(t) - y^n(t)) + \alpha\frac{\varepsilon^*}{2}.$$

Положив $\tilde{\alpha} = \min\{\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2\}$, имеем для всех $n \geqslant N$

$$\max_{t\in[0,t_n]} F(t, y^n(t) + \tilde{\alpha}(\bar{y}^n(t) - y^n(t))) = \max_{t\in M(v^n,\varepsilon_n)} F(t, y^n(t) + \tilde{\alpha}(\bar{y}^n(t) - y^n(t))) =$$

$$= \max_{t \in M(v^n, \varepsilon_n)} \{F(t, y^n(t)) - \widetilde{\alpha}(c_t(y^n), \overline{y^n}(t) - y^n(t)) + \Theta_n(\widetilde{\alpha})\} \leqslant \max_{t \in M(v^n, \varepsilon_n)} F(t, y^n(t)) -$$

$$- \widetilde{\alpha} \max_{t \in M(v^n, \varepsilon_n)} (c_t(y^n), \overline{y}^n(t) - y^n(t)) + \widetilde{\alpha}\frac{\varepsilon^*}{2} \leqslant F(t_n, y^n(t_n)) - \widetilde{\alpha}\frac{\varepsilon^*}{2}.$$

В силу выбора α_n имеем

$$F(t_n, y^{n+1}(t_n)) \leqslant \max_{t \in [0, t_n]} F(t, y^n(t) + \widetilde{\alpha}(\overline{y}^n(t) - y^n(t))) \leqslant F(t_n, y^n(t_n)) - \widetilde{\alpha}\frac{\varepsilon^*}{2}. \tag{17}$$

Так как для всех $t \in [0, T^*]$ и всех n $\| c_t(y^n) \| = 1$, а множества траекторий $X(\cdot, u)$, $Y(\cdot, v)$ на отрезке $[0, T^*]$ компактны в метрике пространства непрерывных функций, то из (9) следует, что существует такое $L, 0 < L < \infty$, что $\left| \frac{dF(t, y^{n+1}(t))}{dt} \right| \leqslant L$ для всех $t \in [0, T^*]$ и всех n. Поэтому

$$F(t_{n+1}, y^{n+1}(t_{n+1})) - F(t_n, y^{n+1}(t_n)) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{dF(t, y^{n+1}(t))}{dt} dt \leqslant L(t_{n+1} - t_n). \tag{18}$$

Отсюда, учитывая фундаментальность последовательности t_n и то, что $F(t_{n+1}, y^{n+1}(t_{n+1})) = 0$, получаем

$$\lim_{n \to \infty} F(t_n, y^{n+1}(t_n)) = 0. \tag{19}$$

Переходя к пределу в (17) и учитывая (19), приходим к противоречию $-\widetilde{\alpha}\frac{\varepsilon^*}{2} \geqslant 0$. Полученное противоречие доказывает стремление ε_n к нулю. Так как $0 \geqslant \delta_n(\varepsilon_n) \geqslant -\varepsilon_n$ для бесконечного числа n, то $\overline{\lim_{n \to \infty}} \delta_n(\varepsilon_n) = 0$. Но и $\underline{\lim_{n \to \infty}} \delta_n(\varepsilon_n) = 0$, ибо если предположить противное, то имеем $\underline{\lim_{n \to \infty}} \delta_n(\varepsilon_n) \leqslant -\varepsilon^* < 0$, что точно так же приведет к противоречию. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. С. Понтрягин и др., Математическая теория оптимальных процессов, «Наука», М., 1969.
2. Н. Н. Красовский, Игровые задачи о встрече движений, «Наука», М., 1970.
3. Б. Н. Пшеничный, О задаче преследования, Кибернетика, № 6, 1967.
4. З. М. Шпортюк, О решении задачи уклонения от встречи в линейной дифференциальной игре, УМЖ, т. 24, № 4, 1972.
5. Е. С. Левитин, Об одном общем методе минимизации для негладких экстремальных задач, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, т. 9, № 4, 1969.

Поступила 14.X 1971 г.

Институт математики АН УССР