УДК 517.432.1

О некоторых специальных функциях и функциональных соответствиях

М. Л. Махишвари

В заметке излагается метод интегральных преобразований некоторых специальных функций посредством сопоставления их индексам символических переменных, а аргументу — произвольного параметра.

1. Обозначим интегральное уравнение

$$\varnothing(p) = p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt, \quad \operatorname{Re} p > 0, \tag{1.1}$$

следующим образом:

$$\varnothing(p) \doteqdot f(t) \quad \text{или} \quad f(t) \doteqdot \varnothing(p),$$

где $\varnothing(p)$ — преобразование Лапласа оригинала $f(t)$ при условии сходимости справа интеграла.

Функция двух переменных $f(x, y)$ имеет образ $\varnothing(p, q)$, заданный в виде

$$\varnothing(p, q) = pq\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(px+qy)} f(x, y)\,dxdy, \quad \operatorname{Re}(p, q) > 0,$$

и обозначаемый $\varnothing(p, q) \doteqdot f(x, y)$.

2. Рассмотрим биконфлюентный гипергеометрический ряд

$${}_0F_1(p^2; x) = \sum_{n=0}^\infty \frac{x^n}{n!p^2(p^2+1)(p^2+2)\ldots(p^2+n-1)}, \tag{2.1}$$

где p — символическая переменная, а x — независимая.

Разложим дробь в правой части, затем, умножив обе части на p^2 и заменив $\dfrac{p^2}{p^2+1}, \dfrac{p^2}{p^2+2}, \ldots$ на их обратные преобразования, получаем

$$p^2[{}_0F_1(p^2; x) - 1] \doteqdot \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (\cos\sqrt{n}\,t)\,x^{n+1}}{\Gamma(n+2)\Gamma(n+1)} \times {}_0F_1(n+2; x). \tag{2.2}$$

Заменив ${}_0F_1$ функцией Бесселя, получаем

$$p^2\left[1 - \frac{\Gamma(p^2)}{x^{(p^2-1)}} J_{(p^2-1)}(2x)\right] \doteqdot \sum_{n=0}^\infty \frac{(\cos\sqrt{n}\,t)\,x^{n+1}}{\Gamma(n+1)} J_{n+1}(2x) \tag{2.3}$$

или

$$x^2[{}_1F_2(1; 2, p^2+1; -x^2)] \doteqdot \sum_{n=0}^\infty \frac{(\cos\sqrt{n}\,t)\,x^{n+1}}{\Gamma(n+1)} J_{n+1}(2x).$$

Далее,

$$p^2\left[1 - \frac{\Gamma(p^2)}{x^{(p^2-1)}} J_{p^2-1}(2x)\right] = \sum_{n=0}^\infty p\int_0^\infty e^{-pt}(\cos\sqrt{n}\,t)\,x^{n+1} \times J_{n+1}(2x)\frac{dt}{\Gamma(n+1)}$$

или

$$\left[1-\frac{\Gamma(p)}{x^{(p-1)}}J_{p-1}(2x)\right]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}J_{n+1}(2x)}{\Gamma(n+1)(p+n)}\therefore p\left[1-\frac{\Gamma(p)}{x^{(p-1)}}J_{p-1}(2x)\right]\doteqdot$$

$$\doteqdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}J_{n+1}(2x)}{\Gamma(n+1)}e^{-nt}.$$

a) Предполагая, что x соответствует q и используя соотношение

$$x^{(1-p^2)}J_{(p^2-1)}(2x)\doteqdot\frac{q}{(q^2+4)\left(1-\frac{p^2}{2}\right)}P_{1-p^2}^{1-p^2}\left\{\frac{q}{(q^2+4)^{1/2}}\right\},\tag{2.4}$$

из (2.3) получаем

$$p^2\left[1-\frac{\Gamma(p^2)\,q2^{(p^2-1)}}{(q^2+1)\left(1-\frac{p^2}{2}\right)}P_{1-p^2}^{1-p^2}\left\{\frac{q}{\sqrt{q^2+1}}\right\}\right]\doteqdot$$

$$\doteqdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}(\cos\sqrt{n}\,t)}{2^{n+1}\Gamma(n+1)}J_{n+1}(x),$$

где q и p соответствуют x и t, $\mathrm{Re}(p,q)>0$.

b) Записав $q^{-\frac{1}{2}}$ для x в (2.3) и использовав

$$q^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)}J_{n+1}\left(\frac{2}{\sqrt{q}}\right)\doteqdot\frac{y^{n+1}{}_0F_2(n+2,n+2;-y)}{\{\Gamma(n+2)\}^2},\tag{2.5}$$

из (2.3) получим

$$p^2\left[1-\frac{\Gamma(p^2)}{q^{\left(\frac{1-p^2}{2}\right)}}J_{p^2-1}\left(\frac{2}{\sqrt{q}}\right)\right]\doteqdot\frac{(\cos\sqrt{n}\,t)y^{n+1}}{\Gamma(n+1)\{\Gamma(n+2)\}^2}\times{}_0F_2(n+2;n+2;-y)$$

или

$$p^2\left[1-{}_0F_1\left(p^2;-\frac{1}{q}\right)\right]=\frac{1}{q}\,{}_1F_2\left(1;2,p^2+1;-\frac{1}{q}\right)\doteqdot$$

$$\doteqdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\cos\sqrt{n}\,t)y^{n+1}}{\Gamma(n+1)[\Gamma(n+2)]^2}\,{}_0F_2(n+2,n+2;-y),$$

где q, p соответствуют y и t, а $\mathrm{Re}(p,q)>0$.

3. Разлагая выражение (2.1), умножая на p, заменяя $\frac{1}{p}$ и $\frac{ap}{p^2+a^2}$ на их оригиналы, получаем

$$p\left[1-\Gamma(p^2)\,x^{(-p^2+1)}J_{p^2-1}(2x)\right]\doteqdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}(\sin\sqrt{n}\,t)}{(\sqrt{n})\,\Gamma(n+1)}J_{n+1}(2x),\tag{3.1}$$

здесь переменная t соответствует p, $\mathrm{Re}\,p>0$.

Поступая так же, как прежде, получаем

a) $$p\left[1-\frac{\Gamma(p^2)\,q}{(q^2+4)^{(1-p^2/2)}}P^{1-p^2}_{1-p^2}\left\{\frac{q}{(q^2+4)^{1/2}}\right\}\right]\doteqdot$$

$$\doteqdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}(\sin\sqrt{n}\,t)}{\Gamma(n+1)\sqrt{n}}J_{n+1}(2x),$$

где t, x соответствуют p, q и $\operatorname{Re}(p,q)>0$;

b) $$p\left[1-\Gamma(p^2)\,q^{\left(\frac{p^2-1}{2}\right)}J_{p^2-1}(2/\sqrt{q})\right]\doteqdot$$

$$\doteqdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{n+1}(\sin\sqrt{n}\,t)}{\Gamma(n+1)\sqrt{n}\{\Gamma(n+2)\}^2}\,{}_0F_2(n+2,n+2;-y),$$

где q, p соответствует y и t и $\operatorname{Re}(p,q)>0$, или

$$\frac{1}{pq}\,{}_1F_2\left(1;2,p^2+1;-\frac{1}{q}\right)\doteqdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{n+1}(\sin\sqrt{n}t)}{\Gamma(n+1)\sqrt{n}\{\Gamma(n+2)\}^2}\,{}_0F_2(n+2,n+2;-y).\tag{3.2}$$

или

$$\frac{1}{q}\,{}_1F_2\left(1;2,2;-\frac{1}{q}\right)\doteqdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{n+1}}{\{\Gamma(n+2)\}^3}\,{}_0F_2(n+2,n+2;-y),$$

где q соответствует y и $\operatorname{Re}q>0$. Но

$$\frac{1}{q}\,{}_1F_2\left(1;2,2;-\frac{1}{q}\right)\doteqdot t_1\ F_3(1;2,2,2;-t).$$

Следовательно, из (3.2)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n{}_0F_2(n+2,n+2;-y)}{\{\Gamma(n+2)\}^3}={}_1F_3(1;2,2,2;-y).$$

4. Рассмотрим

$$\frac{1}{p^2}\,{}_0F_1\left(p^2+1;\frac{-p^2x^2}{4}\right)=\frac{1}{p^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n p^{2n-2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}}{(n)!\,(p^2+1)(p^2+2)\ldots(p^2+n)}.\tag{4.1}$$

Разлагая дробь в правой части, затем умножая все члены на p^2 и заменяя $\dfrac{p^2}{p^2+r}$ на $\cos\sqrt{r}t$, из (4.1) имеем

$$\frac{2^{p^2}\Gamma(p^2+1)\,J_{p^2}(px)}{x^{p^2}p^{p^2}}\doteqdot 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r r^{\left(\frac{r}{2}-1\right)}x^r}{2^r(r-1)!}(\cos\sqrt{r}t)\,I_r(\sqrt{r}x),\tag{4.2}$$

где переменная t соответствует p, $\operatorname{Re}p>|\operatorname{Im}r|$.

Поступая как прежде, получаем:

a) $$\frac{2p^2\,\Gamma(p^2+1)\,q}{p^{(p^2)}(q^2+p^2)^{\frac{(1-p^2)}{2}}}\,P^{-p^2}_{-p^2}\left\{\frac{q}{(q^2+p^2)^{1/2}}\right\} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\,x^r\,(\cos\sqrt{r}\,t)}{2^r(r-1)!\,r^{\left(1-\frac{r}{2}\right)}}\,I_r(\sqrt{r}\,x),$$

где t, x соответствуют p, q, $\operatorname{Re} q > |\operatorname{Im} p|$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} r|$;

b) $$\frac{2^{p^2}\Gamma(p^2+1)\,J_{p^2}\left(\frac{p}{q}\right)}{q^{-p^2}p^{p^2}} \risingdotseq 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\,r^{r-1}\,(\cos\sqrt{r}\,t)\,y^{2r}}{2^{2r}\Gamma(r)\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(2r+1)}\times$$

$$\times\,{}_0F_3\left(r+1,r+\frac{1}{2},r+1;\frac{ry^2}{16}\right),$$

где t, y соответствует p, q, а $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} r|$ и $\operatorname{Re} q > 0$.

5. Рассмотрим

$${}_0F_2(p,a;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,p\,(p+1)\,(p+2)\ldots(p+n-1)a(a+1)\,(a+2)\ldots(a+n-1)}$$

Перенеся первый член в левую часть, затем умножив повсюду на p и заменив $\dfrac{1}{(p+1)\,(p+2)\ldots(p+n-1)}$ на свое обратное преобразование, имеем

$$p\,[{}_0F_2(p,a;x)-1]\risingdotseq\frac{x}{a}\,{}_0F_2[2,a+1;x(1-e^{-t})],$$

где t соответствует p и $\operatorname{Re}(p,x)>0$.

Далее, взяв ${}_0F_2(p,q;x)$ и поступая так, как поступали выше, получаем

$$pq\,[{}_0F_2(p,q;x)-1]\risingdotseq x_0\quad F_2\,[1,2;(1-e^{-t})\,(1-e^{-y})],$$

где символические переменные p, q соответствуют t и y соответственно, $\operatorname{Re}(p,q)>0$

6. Рассмотрим

$$\frac{p}{p+1}\,[{}_2F_1(p+a,\,1;\,p+2;\,z)]=$$

$$=\frac{p}{p+1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p+a)\,(p+a+1)\ldots(p+a+n-1)}{(p+2)\,(p+3)\ldots(p+n-1)}\,z^n\right].$$

Разложив и заменив $\dfrac{p}{p+a}$, $a=1,\ 2,\ 3,\ldots,n$, на свои обратные преобразования, получим после упрощения

$$\frac{p}{p+1}\,[{}_2F_1(p+a,\,1;\,p+2;\,z)]\risingdotseq(1-z)^{(1-a)}\,(1-ze^{-t})^{(a-2)}. \qquad (6.1)$$

Записав $-\mu$ для $a-2$ и умножив обратное преобразование на $e^{-(n-1)t}$, получим

Поступая как прежде, получаем:

a) $$\frac{2p^2\,\Gamma(p^2+1)\,q}{p^{(p^2)}(q^2+p^2)^{\frac{(1-p^2)}{2}}}\,P_{-p^2}^{-p^2}\left\{\frac{q}{(q^2+p^2)^{1/2}}\right\} \doteqdot$$

$$\doteqdot 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\,x^r\,(\cos\sqrt{r}\,t)}{2^r(r-1)!\,r^{\left(1-\frac{r}{2}\right)}}\,I_r(\sqrt{r}\,x),$$

где t, x соответствуют p, q, $\operatorname{Re} q > |\operatorname{Im} p|$, $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} r|$;

b) $$\frac{2^{p^2}\Gamma(p^2+1)\,J_{p^2}\left(\frac{p}{q}\right)}{q^{-p^2}p^{p^2}} \doteqdot 1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^r\,r^{r-1}\,(\cos\sqrt{r}\,t)\,y^{2r}}{2^{2r}\Gamma(r)\,\Gamma(r+1)\,\Gamma(2r+1)}\times$$

$$\times\,{}_0F_3\left(r+1, r+\frac{1}{2}, r+1; \frac{ry^2}{16}\right),$$

где t, y соответствует p, q, а $\operatorname{Re} p > |\operatorname{Im} r|$ и $\operatorname{Re} q > 0$.

5. Рассмотрим

$${}_0F_2(p, a; x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!\,p\,(p+1)\,(p+2)\ldots(p+n-1)a(a+1)\,(a+2)\ldots(a+n-1)}$$

Перенеся первый член в левую часть, затем умножив повсюду на p и заменив $\frac{1}{(p+1)\,(p+2)\ldots(p+n-1)}$ на свое обратное преобразование, имеем

$$p\,[{}_0F_2(p, a; x)-1] \doteqdot \frac{x}{a}\,{}_0F_2\,[2, a+1; x\,(1-e^{-t})],$$

где t соответствует p и $\operatorname{Re}(p, x) > 0$.

Далее, взяв ${}_0F_2(p, q; x)$ и поступая так, как поступали выше, получаем

$$pq\,[{}_0F_2(p, q; x)-1] \doteqdot x_0\;\;F_2\,[1, 2; (1-e^{-t})\,(1-e^{-y})],$$

где символические переменные p, q соответствуют t и y соответственно, $\operatorname{Re}(p, q) > 0$

6. Рассмотрим

$$\frac{p}{p+1}\,[{}_2F_1(p+a, 1; p+2; z)] =$$

$$=\frac{p}{p+1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p+a)\,(p+a+1)\ldots(p+a+n-1)}{(p+2)\,(p+3)\ldots(p+n-1)}\,z^n\right].$$

Разложив и заменив $\frac{p}{p+a}$, $a = 1, 2, 3, \ldots, n$, на свои обратные преобразования, получим после упрощения

$$\frac{p}{p+1}\,[{}_2F_1(p+a, 1; p+2; z)] \doteqdot (1-z)^{(1-a)}\,(1-ze^{-t})^{(a-2)}. \tag{6.1}$$

Записав $-\mu$ для $a-2$ и умножив обратное преобразование на $e^{-(n-1)t}$, получим

$$\frac{p}{p+n}[{}_2F_1(p+n-\mu+1; p+n+1; z)] \doteq e^{-nt}(1-z)^{\mu-1}(1-ze^{-t})^{-\mu}, \tag{6.2}$$

$\operatorname{Re} p > 0$ и p соответствует t.

Далее,

$$(1-e^{-t})^{\nu-1}(1-ze^{-t})^{-\mu} \doteq \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(p+\nu)}\, {}_2F_1(u, p; p+\nu; z), \quad \operatorname{Re}(\nu, p) > 0. \tag{6.3}$$

Умножив на $(1-z)^{\mu-1}$, из (6.3) получим

$$(1-z)^{\mu-1}\left[1-(\nu-1)e^{-t}+\frac{(\nu-1)(\nu-2)}{2!}e^{-2t}+\ldots\right.$$

$$\left.\ldots+\frac{(-1)^n(\nu-1)(\nu-2)\ldots(\nu-n)}{n!}e^{-nt}+\ldots\right](1-ze^{-t})^{-\mu} \doteq$$

$$\doteq (1-z)^{(\mu-1)}\frac{\Gamma(p+1)\Gamma(\nu)}{\Gamma(p+\nu)}\, {}_2F_1(\mu, p; p+\nu; z). \tag{6.4}$$

Подставив (6.2) в (6.4), получаем тождество

$$\sum_{n=0}^{\nu-1}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(\nu-n)(p+n)}\, {}_2F_1\left[\begin{matrix} p+n+1-\mu, & 1; \\ p+n+1; & z\end{matrix}\right] =$$

$$= (1-z)^{\mu-1}\frac{\Gamma(p)}{\Gamma(p+\nu)}\, {}_2F_1(\mu, p; p+\nu; z).$$

7. Рассмотрим функцию Уиттекера

$$z^{\left(-\frac{p}{2}-1\right)}e^{\frac{1}{2}z}M_{-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}+\frac{1}{2}}(z) = 1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(p+1)z^n}{n!(p+n+1)}.$$

Умножив все повсюду на $\frac{p}{p+1}$ и заменив $\frac{p}{p+n+1}$ на обратное преобразование, получаем

$$\frac{pe^{z/2}}{(p+1)z^{\left(\frac{p}{2}+1\right)}}M_{-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}+\frac{1}{2}}(z) \doteq e^{-t}+e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nt}z^n}{n!},$$

где t соответствует p.

Записав $z=\frac{1}{q}$ и заменив $\frac{1}{q^n}$ на обратное преобразование, имеем

$$\frac{pq^{\left(\frac{p}{2}+1\right)}}{(p+1)}e^{\frac{1}{2q}}M_{-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}+\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{q}\right) \doteqdot e^{-t}\, {}_0F_1(1; e^{-t}y) = e^{-t}I_0(2e^{-\frac{t}{2}}y^{\frac{1}{2}}),$$

где t, y соответствуют p и q соответственно и $\operatorname{Re}(p, q) > 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. S. K. Bose, On Laplace transform of two variables, Bull. Calcutta Math. Soc., 41 (4), 1949.
2. Bateman Project, Tables of Integral Transforms, vol. 1, 1954.

3. P. Humbert, Functions de Bessel et Calcul symbolique, Anna, de la Soc. Sci. de Bruxelles, Ser. I, t. LXIV, 1950.
4. L. Poli and P Delerue, Le Calcul symbolique á deux variables et ses Applications, Fasc. CXXVII, Memorial des Sci. Math., 1954.
5. B. Van der Pol and K. F. Nicssen, Simbolic Calculus, Phil. Mag., 13 (7 th Ser.), 1932.

Поступила 11.II 1970 г.
Индия