УДК 517.948.35:513.88:517.948.5

К вопросу о структуре спектра оператора Шредингера

М. А. Рыбак

Пусть G — бесконечная область двумерного евклидового пространства E_2, а S — ее граница. Обозначим через L дифференциальный оператор, порожденный в пространстве $L_2(G)$ выражением $l[u] = -\Delta u + c(p)u$ и нулевыми граничными условиями на S; здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{y\partial^2}$, $c(p)$ — достаточно гладкая, положительная функция, $p = (x, y)$ — точка из E_2. Через L_0 обозначим самосопряженный оператор, порожденный в $L_2(G)$ выражением $-\Delta$ и нулевыми граничными условиями на S.

Известно [1—3], что в случае $G = G_1 = [a, b] \times [0, \infty)$ спектр оператора L_0 чисто непрерывный. При финитной деформации области G_1 (полученную в результате область обозначим через $\widetilde{G}_1$) непрерывный спектр остается тем же, но, кроме того, может появиться дискретный спектр, состоящий из изолированных собственных значений конечной кратности с единственной возможной предельной точкой $\lambda = \infty$ [1, 2]. В случае, когда $G = G_2$, G_2 — квазиконическая область, расположенная в полупространстве $y > a$ $(a > -\infty)$ при условии, что внешняя нормаль в каждой точке p границы S составляет с положительным направлением оси OY угол $\beta \geqslant \frac{\pi}{2}$, на непрерывной части спектра $C(L_0) = [0, \infty]$ оператора L_0 нет собственных значений [3].

В заметке доказаны теоремы о структуре спектра оператора L, являющиеся в определенном смысле аналогами теорем Джонса и Реллиха [2, 3] соответственно. Методика доказательства теорем о структуре спектра как для оператора L_0, так и для оператора L, одна и та же.

Теорема 1. *Если достаточно гладкая положительная функция $c(p)$ для $y > d$ равна постоянной, то дискретная часть спектра оператора L, рассматриваемого в $L_2(\widetilde{G}_1)$, состоит из изолированных собственных значений конечной кратности с единственной возможной предельной точкой $\lambda = \infty$.*

Доказательство. Поскольку $c(p) > 0$, то дискретный спектр оператора L расположен на положительной части λ-оси.

Обозначим через $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots$ последовательные собственные значения краевой задачи, индуцированной оператором L в поперечном сечении области $\widetilde{G}_1$, произведенном выше деформированной части. Не ограничивая общности, будем считать спектр этого индуцированного оператора простым, так что $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ $(\alpha_1 = \alpha_1' + q$, где α_1' — первое собственное значение оператора $l = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ на отрезке $[a, b])$. Соответствующие собственные функции пусть будут $w_1(x)$, $w_2(x)$, $w_3(x)$, ... Далее выберем число b настолько большим, чтобы прямая $y = b$ делила $\widetilde{G}_1$ на ограниченную часть

g и неограниченную часть G_b $(b > d)$, представляющую собой область типа G_1. Через $\lambda_1' \leqslant \lambda_2' \leqslant \lambda_3' \leqslant \ldots$ обозначим последовательные собственные значения оператора L в g с краевым условием $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ при $y = b$ и нулевым краевым условием $u = 0$ на остальной части границы g. Соответствующие собственные функции обозначим через

$$\psi_1(p), \psi_2(p), \psi_3(p), \ldots \tag{1}$$

Сначала покажем, что левее точки α_1 спектр оператора L в $L_2(\widetilde{G}_1)$ исчерпывается конечным числом собственных значений конечной кратности. С этой целью отметим, что оператор L_b в $L_2(G_b)$ с краевым условием $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ при $y = b$ и нулевым краевым условием на остальной части границы G_b не имеет никаких точек спектра левее α_1.

Действительно, предположив противное, найдем функцию $u \in D(L_b)$, для которой $\int\limits_b^\infty dy \int\limits_{l_y} \{|\nabla u|^2 + q|u|^2 - \alpha_1 |u|^2\} dx < 0$, где l_y — прямая, параллельная оси OX, отсекающая на оси OY отрезок y. Но тогда при $y > b$ $\int\limits_{l_y} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + qu^2 - \alpha_1 u^2\right\} dx < 0$ и тем более $\int\limits_{l_y} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + qu^2 - \alpha_1 u^2\right\} dx < 0$ $(\alpha_1 = \alpha_1' + q)$, что невозможно, так как α_1 есть первое собственное значение индуцированной краевой задачи. Таким образом, α_1 является первой точкой спектра оператора L_b. Далее воспользуемся леммой Джонса [2, 1], в силу которой заключаем, что левее точки α_1 спектр оператора L в $L_2(\widetilde{G}_1)$ исчерпывается конечным числом собственных значений конечной кратности. Теперь для доказательства теоремы остается установить, что в каждом из интервалов

$$(\alpha_1, \alpha_2], \quad (\alpha_2, \alpha_3], \ldots \tag{2}$$

имеется конечное число собственных значений конечной кратности данного оператора L в $L_2(\widetilde{G}_1)$. Пусть $v(x, y)$ — собственная функция оператора L в $L_2(\widetilde{G}_1)$. При фиксированном $y > b$ эту функцию можно представить ортогональным рядом

$$v(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \chi_j(y) w_j(x), \tag{3}$$

так что при любом n $\sum\limits_{j=1}^{n} |\chi_j(y)|^2 \leqslant \int\limits_{l_y} |v(x, y)|^2 dx$ и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} \int_b^\infty |\chi_j(y)|^2 dy \leqslant \|v\|_{G_b}^2. \tag{4}$$

С другой стороны, подставляя ряд (3) в соотношение

$$\Delta u - c(p) u + \lambda u = 0, \tag{5}$$

получаем для коэффициентов этого ряда обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\begin{gathered} \chi_j''(y) - q\chi_j(y) + (\lambda - \alpha_j')\chi_j(y) = 0, \\ \chi_j(y) + (\lambda - \alpha_j)\chi_j(y) = 0 \quad (y > b, \ j = 1, 2, 3, \ldots). \end{gathered} \tag{6}$$

Если собственное значение λ оператора L в $L_2(\widetilde{G}_1)$ принадлежит первому из интервалов системы (2), то $\lambda > \alpha_j$. Но тогда из неравенства (4) и дифференциального уравнения (6) следует, что

$$\chi_j(y) = 0, \quad y > b. \tag{7}$$

Теперь покажем, что в интервале $(\alpha_1, \alpha_2]$ не может находиться более n_1' собственных значений оператора L в $L_2(\widetilde{G}_1)$, где число n_1' определено неравенством $\lambda'_{n_1'} < \alpha_2 \leqslant \lambda'_{n_1'+1}$. Действительно, предположив противное, сможем образовать линейную комбинацию $\varphi(p)$ собственных функций оператора L в $L_2(\widetilde{G}_1)$, соответствующих собственным значениям из интервала $(\alpha_1, \alpha_2]$, ортогональную в $L_2(g)$ к первым n_1' функциям системы (1). Для этой функции, очевидно, $\int\limits_{\widetilde{G}_1}\{|\nabla\varphi|^2 + c(p)|\varphi|^2 - \alpha_2|\varphi|^2\}dg \leqslant 0$, т. е.

$$\int\limits_{g}\{|\nabla\varphi|^2 + c(p)|\varphi|^2 - \alpha_2|\varphi|^2\}\,dg + \int\limits_{G_b}\{|\nabla\varphi|^2 + q|\varphi|^2 - \alpha_2|\varphi|^2\}\,dg \leqslant 0. \tag{8}$$

Но из ортогональности $\varphi(p)$ к собственным функциям $\{\psi_j\}_{j=1}^{n_1'}$ следует, что первое слагаемое в (8) положительно. Поэтому должно быть $\int\limits_b^\infty dy\int\limits_{l_y}\{|\nabla\varphi|^2 + q|\varphi|^2 - \alpha_2|\varphi|^2\}\,dx < 0$, а значит при некотором $y > b$

$$\int\limits_{l_y}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + q|\varphi|^2 - \alpha_2|\varphi|^2\right\}dx < 0. \tag{9}$$

С другой стороны, каждая из собственных функций оператора L в $L_2(\widetilde{G}_1)$, входящая в состав линейной комбинации $\varphi(p)$, в силу (7) должна быть в $L_2(l_y)$ ортогональна к функции $\omega_1(x)$, так что

$$\int\limits_{l_y}\varphi(x, y)\,\omega_1(x)\,dx = 0. \tag{10}$$

Из соотношений (9), (10) в силу экстремальных свойств собственных значений, следует, что у индуцированной задачи должно существовать собственное значение внутри интервала $(\alpha_1, \alpha_2]$. Полученное противоречие показывает несостоятельность предположения о существовании в интервале $(\alpha_1, \alpha_2]$ более n_1' собственных значений оператора L в $L_2(\widetilde{G}_1)$. Переходя ко второму интервалу системы (2) точно также, используя вместо одного соотношения (7) два:

$$\chi_1(y) \equiv \chi_2(y) \equiv 0 \quad (y > b),$$

получим, что в интервале $(\alpha_2, \alpha_3]$ может находиться не более n_2' собственных значений оператора L, где $\lambda'_{n_2'} \leqslant \alpha_3 \leqslant \lambda'_{n_2'+1}$. Переходя, таким образом, от каждого интервала системы (2) к следующему, получим полное доказательство теоремы.

Т е о р е м а 2. *Если достаточно гладкая, положительная функция $c(p)$ удовлетворяет условию $\dfrac{\partial c(p)}{\partial y} < 0$, то на непрерывном спектре оператора L, рассматриваемого в $L_2(G_2)$, нет собственных значений.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы достаточно установить, что при $\lambda > 0$ уравнение

$$-\Delta u + c(p)\,u - \lambda u = 0 \tag{11}$$

не имеет в $L_2(G_2)$ решения $u(p)$, равного нулю на границе S области G_2 и отличного от тождественного нуля в G_2.

При любом η часть области G_2, лежащая между прямыми $y=a$ и $y=\eta$, ограничена, обозначим ее через g_η. Далее, ту часть прямой $y=\eta$, которая лежит в G_2, обозначим через σ_η, а остальную часть границы области g_η — через S_η.

Теперь докажем, что если функция $u(p)$, не равная нулю тождественно, удовлетворяет уравнению (11) при $\lambda \geqslant 0$ и обращается в нуль на S, то существует такое число $\mu > 0$ и последовательность $\eta_n \to \infty$, что

$$\int\limits_{g_{\eta_n}} |u(p)|^2 \, dg \geqslant \mu\eta_n \tag{12}$$

и, следовательно, $u \overline{\in} L_2(G_2)$.

При доказательстве можно считать функцию $u(p)$ вещественной, ибо если $u_1 = \operatorname{Re} u$, $u_2 = \operatorname{Im} u$ и неравенство (3) выполнено для u_1 и u_2 при $\mu=\mu_1$, $\eta_n=\eta_n^{(1)}$ и $\mu=\mu_2$, $\eta_n=\eta_n^{(2)}$ соответственно, то при $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$

$$\int\limits_{g_{\eta_n^{(1)}}} |u_1(p)|^2 \, dg + \int\limits_{g_{\eta_n^{(2)}}} |u_2(p)|^2 \, dg > \mu\,(\eta_n^{(1)} + \eta_n^{(2)}),$$

откуда вытекает (12) при $\eta_n = \eta_n^{(1)} + \eta_n^{(2)}$.

Предполагая решение $u(p)$ вещественным, имеем

$$0 = (\Delta u - c(p)u + \lambda u)\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(c(p)u^2) + \frac{1}{2}u^2\frac{\partial c(p)}{\partial y} + \frac{\lambda}{2}\frac{\partial u^2}{\partial y},$$

откуда, интегрируя по g_η, получаем

$$\iint\limits_{g_\eta}\left\{\operatorname{div}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\nabla u\right] - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}[|\nabla u|^2 + c(p)u^2] + \frac{1}{2}\lambda\frac{\partial u^2}{\partial y} + \frac{1}{2}u^2\frac{\partial c(p)}{\partial y}\right\} dg = 0$$

или, если через $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначить дифференцирование вдоль внешней нормали к S,

$$\int\limits_{S_\eta+\sigma_\eta}\left\{\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{2}[|\nabla u|^2 + c(p)u^2]\frac{\partial y}{\partial n} + \frac{1}{2}\lambda u^2\frac{\partial y}{\partial n}\right\} d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{g_\eta} u^2\frac{\partial c(p)}{\partial y}\, dg = 0. \tag{13}$$

Так как, далее, $u(p)=0$ при $p \in S$, то на S $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial n}\check{n}$, где $\check{n}$ — единичная внешняя нормаль к S. Поэтому соотношение (13) принимает вид

$$\int\limits_{S_\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2\frac{\partial y}{\partial n}\, d\sigma + \int\limits_{\sigma_\eta}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - c(p)u^2 + \lambda u^2\right\} d\sigma +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{g_\eta} u^2\frac{\partial c(p)}{\partial y}\, dg = 0. \tag{14}$$

С другой стороны, так как $\frac{\partial y}{\partial n} \leqslant 0$ на S, то при $\eta \geqslant \eta_0$

$$-\int\limits_{S_\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma \geqslant -\int\limits_{S_\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 \frac{\partial y}{\partial n} d\sigma = \rho \geqslant 0. \qquad (15)$$

Выберем число η_0 так, чтобы $\rho > 0$. Это возможно, так как область G_2 не является областью типа G_1 и, следовательно, в окрестности некоторой точки на S будет $\frac{\partial y}{\partial n} < 0$. При этом в этой окрестности не всюду будет $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, ибо, поскольку $u = 0$ на S, то имели бы, по теореме единственности [4], $u(p) \equiv 0$ $(p \in G_2)$.

Таким образом, при $\eta \geqslant \eta_0$, в силу (14) и (15) и условий, наложенных на $c(p)$, имеем

$$\iint\limits_{\sigma_\eta} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - c(p)u^2 + \lambda u^2\right\} d\sigma \geqslant \rho - \frac{1}{2}\int\limits_{g_\eta} u^2 \frac{\partial c(p)}{\partial y} dg \geqslant \rho$$

или, учитывая, что $c(p) > 0$, $\int\limits_{\sigma_\eta} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \lambda u^2\right\} d\sigma \geqslant \rho > 0$ и, тем более, $\int\limits_{\sigma_\eta} \{|\nabla u|^2 + \lambda u^2\} d\sigma \geqslant \rho > 0$, откуда получаем

$$\int\limits_{g_\eta} \{|\nabla u|^2 + \lambda u^2\} d\sigma \geqslant \rho(\eta - \eta_0). \qquad (16)$$

Для того, чтобы вывести из полученного соотношения (16) требуемое неравенство (12), введем функцию $I(\eta) = \int\limits_{\sigma_\eta} u^2 d\sigma$ и рассмотрим два случая, когда она при $\eta \to \infty$ монотонно возрастает и когда это не имеет место. В первом случае при всех η и некотором μ $I(\eta) > \mu$, откуда следует, что $\int\limits_{g_\eta} u^2 dg > \mu\eta + C$, а это означает выполнение требуемого неравенства (12). Во втором случае существует последовательность $\eta_n \to \infty$ такая, что $I'(\eta) = 2\int\limits_{\sigma_\eta} u \frac{\partial u}{\partial y} d\sigma \leqslant 0$.

Но тогда из тождества

$$0 = \int\limits_{g_\eta} (\Delta u - c(p)u + \lambda u) u dg = \int\limits_{\sigma_\eta} u \frac{\partial u}{\partial y} d\sigma - \int\limits_{g_\eta} |\nabla u|^2 dg -$$
$$- \int\limits_{g_\eta} c(p) u^2 dg + \lambda \int\limits_{g_\eta} u^2 dg$$

вытекает

$$\int\limits_{g_{\eta_i}} |\nabla u|^2 dg < \int\limits_{g_\eta} (|\nabla u|^2 + c(p)u^2) dg \leqslant \lambda \int\limits_{g_\eta} u^2 dg$$

и требуемое неравенство (12) следует очевидным образом из соотношения (16).

Заметим, что все рассмотрения можно проводить не только в пространстве E_2, а и в пространстве E_3.

В заключение выражаю искреннюю благодарность Ю. М. Березанскому, М. Л. Горбачуку и Н. Н. Чаусу за ряд полезных бесед.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. М. Глазман, Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, Физматгиз, М., 1963.
2. D. S. Jones, The eigenvalues of $\Delta^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi—infinite domains, Proc. Cambridge Philos. Soc., 49, 1953, 668—684.
3. F. Rellich, Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 53, 1943, 57—65.
4. Е. М. Ландис, О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений, ДАН СССР, т. 107, № 5, 1956.

Поступила 2.IV 1970 г.

Киевский торгово-экономический институт