УДК 517.537

Условия базисности одной системы аналитических функций

В. И. Горгула, Н. И. Нагнибида

Через $A_R (0 < R < \infty)$ обозначим пространство всех однозначных и аналитических в круге $|z| < R$ функций с топологией компактной сходимости.

Напомним далее [1], что базис пространства A_R называется квазистепенным в смысле М. Г. Хапланова, если он является образом степенного базиса $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ некоторого пространства A_{R_1} $(0 < R_1 < \infty)$ при взаимно однозначном и взаимно непрерывном отображении A_{R_1} на A_R.

В этой заметке находятся необходимые и достаточные условия, при которых квазистепенной базис в A_R образует система* $\{z^n f^{(n)}(\omega^n z)\}_{n=0}^{\infty}$, где ω — произвольное фиксированное комплексное число. Другими словами, если определить на элементах базиса $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ пространства A_{R_1} оператор L соотношениями

$$Lz^n = z^n f^{(n)}(\omega^n z) \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{1}$$

то нас интересуют условия, при которых он может быть расширен до оператора, осуществляющего взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение A_{R_1} на A_R.

Из соотношения (1) легко следует, что матрица $[l_{i,n}]$ оператора L в степенном базисе $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ пространства A_{R_1} (т. е. $Lz^n = \sum_{i=0}^{\infty} l_{i,n} z^i$) имеет вид:

$$l_{i,n} = \begin{cases} 0, & i < n, \\ \dfrac{a_i i!}{(i-n)!}\, \omega^{n(i-n)}, & i \geqslant n, \end{cases} \tag{2}$$

где a_i — тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$.

Как известно [5, 6], этот оператор отображает A_{R_1} в A_R непрерывно тогда и только тогда, когда элементы его матрицы удовлетворяют следующему условию: для каждого ρ, $\rho < R$, существуют такие r, $r < R_1$, и C, $C \geqslant 0$, что

$$\frac{|a_i|\, i!}{(i-n)!} |\omega|^{n(i-n)} \leqslant C \frac{r^n}{\rho^i}, \quad 0 \leqslant n \leqslant i < \infty. \tag{3}$$

Лемма. *Если оператор L осуществляет взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение A_{R_1} на A_R, то*

$$\lim_{i \to \infty} \sqrt[i]{|a_i|\, i!} = \frac{R_1}{R}. \tag{4}$$

* Некоторые достаточные условия базисности аналогичных систем были получены раньше в [2—4].

Доказательство. Так как матрица оператора L имеет нижнетреугольный вид, то она имеет обратную (также нижнетреугольную) в том и только в том случае, когда ее диагональные элементы $l_{i,i} = a_i i!$ отличны от нуля. В этом случае диагональными элементами матрицы обратного оператора $M = L^{-1}$ будут $m_{i,i} = \frac{1}{a_i i!}$.

Из условия (3) следует, что $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|l_{i,i}|} \leqslant \frac{R_1}{R}$. Так как соответствующему условию непрерывности удовлетворяют и элементы матрицы оператора M, то $\overline{\lim\limits_{i\to\infty}} \sqrt[i]{|m_{i,i}|} \leqslant \frac{R}{R_1}$. Из этих неравенств следует утверждение леммы.

Таким образом, если система $\{z^n f^{(n)}(\omega^n z)\}_{n=0}^{\infty}$ образует в пространстве A_R квазистепенной базис, то все тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ отличны от нуля* и выполняется условие (4) при некотором R_1.

Заметим еще, что в силу (4) оператор T:

$$Tg(z) = T\sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} g_k a_k k!\, z^k \quad (g(z) \in A_{R_1})$$

осуществляет взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение пространства A_{R_1} на A_R.

Перейдем теперь к нахождению необходимых и достаточных условий, при которых система $\{z^n f^{(n)}(\omega^n z)\}_{n=0}^{\infty}$ образует в пространстве A_R квазистепенной базис. Как увидим ниже, эти условия существенно зависят от того, будет ли $|\omega| < 1$, $|\omega| = 1$ или $|\omega| > 1$.

Теорема 1. *Система $\{z^n f^{(n)}(\omega^n z)\}_{n=0}^{\infty}$ при $|\omega| < 1$ образует квазистепенной базис пространства A_R тогда и только тогда, когда все тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ отличны от нуля и выполняется условие* (4) *при некотором* R_1.

Доказательство. Так как необходимость условий теоремы была получена выше, мы остановимся только на их достаточности.

Как следует из [4], система $\{z^n e^{\omega^n z}\}_{n=0}^{\infty}$ является квазистепенным базисом в A_{R_1}, так как она является образом степенного базиса при взаимно однозначном и взаимно непрерывном отображении A_{R_1} на себя. Справедливость теоремы 1 следует теперь из того, что $z^n f^{(n)}(\omega^n z) = Tz^n e^{\omega^n z}$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Любопытно отметить, что если система $\{z^n f^{(n)}(\omega^n z)\}_{n=0}^{\infty}$ при $|\omega| < 1$ является квазистепенным базисом в некотором пространстве типа A_R, то она является таковым и в любом другом пространстве указанного вида.

Теорема 2. *Система $\{z^n f^{(n)}(\omega^n z)\}_{n=0}^{\infty}$ при $|\omega| = 1$ образует квазистепенной базис в пространстве A_R тогда и только тогда, когда все тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ отличны от нуля, выполняется условие* (4) *при некотором R_1 и целая функция $\psi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^{-\frac{k^2}{2}}}{k!} z^k$ не имеет нулей в круге $|z| < R_1$.*

Доказательство. Учитывая вид (2) матрицы оператора L, для любой функции $\varphi(z) \in A_{R_1}$ легко получим:

$$L\varphi(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{i} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \omega^{-\frac{n^2}{2}} \frac{\omega^{\frac{(i-n)^2}{2}}}{(i-n)!} \right) a_i i!\, \omega^{\frac{i^2}{2}} z^i.$$

---

* Это условие является необходимым даже для полноты указанной системы в пространстве A_R.

Другими словами, $L\varphi(z) = T_1^{-1} T U_\psi T_1 \varphi(z)$, где U_ψ — оператор умножения на функцию $\psi(z)$, T_1 — оператор, определяемый соотношением

$$T_1 g(z) = T_1 \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \omega^{-\frac{k^2}{2}} z^k,$$

а T_1^{-1} — его обратный.

Поскольку при $|\omega| = 1$ операторы T_1 и T_1^{-1} оуществляют взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение любого пространства $A_r\,(0 < r < \infty)$ на себя, при выполнении условия (4) такое же отображение A_{R_1} на A_R осуществляет оператор T, то оператор L будет иметь, очевидно, обратный (отображающий A_R на A_{R_1}) тогда и только тогда, когда функция $\psi(z)$ не имеет нулей в круге $|z| < R_1$. Теорема доказана.

Следствие. *Система $\{z^n f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ образует квазистепенной базис в пространстве A_R тогда и только тогда, когда все тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ отличны от нуля и* $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|f^{(i)}(0)|} = l = \text{const}$, где $0 < l < \infty$.

Пример. Пусть $\omega = -1$. В этом случае $\psi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{i^{-k^2}}{k!} z^k = \cos iz -$ $- \sin iz$ и система $\{z^n e^{(-1)^n z}\}_{n=0}^{\infty}$ образует квазистепенной базис в A_R тогда и только тогда, когда $0 < R \leqslant \frac{\pi}{4}$ (см. также [3]).

В общем случае система $\{z^n f^{(n)}((-1)^n z)\}_{n=0}^{\infty}$ образует квазистепенной базис в пространстве A_R тогда и только тогда, когда ее тейлоровские коэффициенты отличны от нуля, существует предел $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\,k!} = l = \text{const}$, $0 < l < \infty$, и $R \leqslant \frac{\pi}{4l}$ (ср. с [4]).

Теорема 3. *Нет ни одной функции $f(z)$, для которой система $\{z^n f^{(n)}(\omega^n z)\}_{n=0}^{\infty}$ при $|\omega| > 1$ образовала бы квазистепенной базис хотя бы в одном пространстве A_R.*

Действительно, если бы система $\{z^n f^{(n)}(\omega^n z)\}_{n=0}^{\infty}$ образовывала в A_R квазистепенной базис, то все тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ были бы отличными от нуля и для некоторого R_1 выполнялось бы условие (4). Но тогда система $T^{-1} z^n f^{(n)}(\omega^n z) = z^n e^{\omega^n z}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ образовывала бы квазистепенной базис в некотором пространстве A_{R_1}, что, как следует из теоремы 3 работы [4], невозможно.

Замечание 1. Если система $\{z^n f^{(n)}(\omega^n z)\}_{n=0}^{\infty}$ при $|\omega| \leqslant 1$ образует квазистепенной базис в некотором A_R, то коэффициенты $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ разложения по этим функциям произвольной функции $\varphi(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \varphi_i z^i \in A_R$ могут быть найдены по формулам

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{\varphi_i \omega^{\frac{n^2 - i^2}{2}}}{a_i\, i!} \alpha_{n-i}, \tag{5}$$

гда $\alpha_k\ (0 \leqslant k < \infty)$ — тейлоровские коэффициенты функции $\frac{1}{\psi(z)}$.

Другими словами, формулы (5) определяют систему линейных непрерывных функционалов над A_R, биортогональную к системе функций $\{z^n f^{(n)}(\omega^n z)\}_{n=0}^{\infty}$.

З а м е ч а н и е 2. Известно [7], что система $\{z^n f^{(n)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ является полной в пространстве A_R тогда и только тогда, когда все тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ отличны от нуля. В свою очередь, полнота этой системы равносильна (это легко следует из известного критерия Банаха) полноте системы $\{B^n f(z)\}_{n=0}^{\infty}$, где $B\varphi(z) = z\varphi'(z)$ для любой $\varphi(z) \in A_R$.

Поэтому интересно, что система $\{B^n f(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ни при каких дополнительных условиях, налагаемых на $f(z)$, уже квазистепенным базисом в A_R быть не может. Действительно, пусть существует такое R_1 и оператор Q, осуществляющий взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение A_{R_1} на A_R, что $Qz^n = B^n f(z)$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Тогда, очевидно, $f(z) = Q1$ и $(Q^{-1}BQ)^n 1 = z^n$ $(n = 0, 1, \ldots)$, т. е. $Q^{-1}BQ\varphi(z) = z\varphi(z)$ для любой $\varphi(z) \in A_{R_1}$. Полагая здесь $\varphi(z) = Q^{-1}1$, приходим к противоречию.

Можно легко показать, что система функций вида $\{B^n f(z)\}_{n=0}^{\infty}$ не может быть ни в одном пространстве A_R не только квазистепенным базисом в понимании М. Г. Хапланова, но и базисом вообще.

З а м е ч а н и е 3. Утверждения, аналогичные теоремам 1 — 3, имеют место и в том случае, когда $R = \infty$ (т. е. и в случае пространства A_∞ всех целых функций). Нужно только везде положить $R_1 = R = \infty$, а условие (4) следует заменить на такое:

$$0 < \varliminf_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\, k!} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|\, k!} < +\infty.$$

Доказательства проводятся точно так же, как и предыдущие.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Г. Х а п л а н о в, Матричный признак базиса в пространстве аналитических функций, ДАН СССР, т. 80, № 2, 1951.
2. М. Г. Х а п л а н о в, О полноте некоторых систем аналитических функций, Уч. зап. Ростовского-на-Дону гос. педагогического ин-та, вып. 3, 1955.
3. К. М. Ф и ш м а н, Г. М. С а с ь к о, О некоторых системах функций, образующих квазистепенные базисы в пространствах аналитических функций в круге, ДАН СССР, т. 146, № 2, 1962.
4. Н. И. Н а г н и б и д а, Об одном базисе пространства аналитических функций в круге, Сиб. матем. ж., т. 11, № 2, 1970.
5. М. Г. Х а п л а н о в, Линейные преобразования аналитических пространств, ДАН СССР, т, 80, № 1, 1951.
6. К. М. Ф и ш м а н, К вопросу о линейных преобразованиях аналитических пространств, ДАН СССР, т. 127, № 1, 1959.
7. И. И. И б р а г и м о в, О полноте некоторых систем аналитических функций, Изв. АН СССР, сер. матем., № 5—6, 1939.

Поступила 17.XII 1971 г.

Ивано-Франковский институт нефти и газа,
Черновицкий государственный университет