УДК 517.5

Равномерные приближения функций и некоторые свойства дробных полиномов

В. Д. Коромысличенко

1. Пусть $G = \{x\}$ — компакт конечномерного или бесконечномерного обобщенного гиперкомплексного пространства Y, $x = \begin{pmatrix} x_1(\pi) \\ x_2(\pi) \\ \vdots \end{pmatrix}$, где

$x_\nu(\pi)$ — обобщенные гиперкомплексные числа [1]. Предполагаем, что функции $f(x)$, $P_n(a;x)$, $x \in G$ (соответственно $f(z)$, $P_n(a;z)$, $z \in A$) отображают множество $G(A)$ в Y с расстоянием между функциями $\rho(f, P_n) = \max_{x \in G} \| f(x) - P_n(a;x) \| = \max_{x \in G} \sqrt{\sum_c \sum_{\mu\ldots\nu} (\delta^{(c)}_{\mu\ldots\nu}(a;x))^2}$ [1]. Рассмотрим обобщение работы [2].

Теорема 1. *Пусть произвольную непрерывную функцию $f(x)$, $x \in G$, можно равномерно приблизить непрерывными функциями $P_n(a;x)$, $n = 1, 2, \ldots, x \in G$. На множестве G определена функция $z = \varphi(x)$ непрерывно отображающая множество G на $A = \{z\}$ $(A \subset Y)$, причем $P_n(a;z)$ определены и непрерывны на A и всякую непрерывную на A функцию $f(z)$ можно равномерно приблизить функциями $P_n(a;z)$, $a \equiv a_n$ — параметры. Тогда для того чтобы произвольную непрерывную на G функцию $f(x)$ можно было приблизить равномерно на G с помощью $P_n(a;\varphi(x))$, $n = 1, 2, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы отображение $z = \varphi(x)$ было взаимно однозначным.*

Зависимость $P_n(a;x)$ от a вообще нелинейная. Доказывается теорема по аналогии с соответствующим доказательством в [2]. Заметим, что если $P_n(a;x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in G$, а $x = \varphi^*(z)$ отображение произвольного Z на G, то $P_n(a;\varphi^*(z)) \rightrightarrows f(\varphi^*(z))$, $z \in Z$.

Достаточность. Пусть $z = \varphi(x)$ — взаимно однозначное непрерывное отображение G на A, $\varphi^{-1}(z)$ — обратное отображение. Непрерывную функцию $f(\varphi^{-1}(z))$ можно равномерно приблизить функциями $P_n(a;z)$, т. е. для $\varepsilon > 0$ можно указать $N(\varepsilon)$, что

$$\| f(\varphi^{-1}(z)) - P_n(a;z) \| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N(\varepsilon), \quad z \in A,$$

откуда получаем

$$\| f(x) - P_n(a;\varphi(x)) \| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon), \quad x \in G.$$

Необходимость. Пусть $z = \varphi(x)$ — отображение не взаимно однозначное, т. е. найдутся x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, что $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$. Пусть $2\varepsilon \leqslant \| x_1 - x_2 \|$. По условию функцию x можно приблизить равномерно функциями $P_n(a;\varphi(x))$, т. е.

$$\| x - P_n(a;\varphi(x)) \| < \varepsilon, \quad x \in G, \quad n > N(\varepsilon),$$

в частности, $\| x_1 - P_n(a;\varphi(x_1)) \| < \varepsilon$, $\| x_2 - P_n(a;\varphi(x_2)) \| < \varepsilon$, т. е. $\| x_1 - x_2 \| < 2\varepsilon$, что противоречит условию.

2. Рассмотрим вопрос о числе точек максимального уклонения для дробных полиномов. Пусть на отрезке $[a, b]$ определены непрерывные функции $\varphi_\nu(x)$, $x \in [a, b]$, $\nu = \overline{0, m}$, образующие Т-систему порядка m на $[a, b]$. Предполагаем, что у функций $\varphi_\nu(x)$ нет фиксированных нулей.

Следующая теорема обобщает некоторые исследования [3].

Теорема 2. *Дробный полином* ($\not\equiv$ const) *вида*

$$P = \frac{P_m}{Q_n} = \frac{\sum_{\nu=0}^{m} a_\nu \varphi_\nu(x)}{\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \varphi_\nu(x)}, \quad m \geqslant n, \quad Q_n(x) > 0, \tag{1}$$

имеет на $[a, b]$ не более $m + 1$ точек максимального уклонения от нуля.

Доказательство. Пусть дан произвольный фиксированный полином вида (1), Функции $\psi_\nu(x) = \dfrac{\varphi_\nu(x)}{Q_n(x)}$, $\nu = \overline{0, m}$ (знаменатель фиксирован), образуют T-систему порядка m, причем среди полиномов по этой системе имеется тождественно равный постоянной величине. На основе теоремы работы [3] любой полином $\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \psi_\nu(x)$ $(\not\equiv \text{const})$ (в частности, фиксированный) имеет на $[a, b]$ не более $m+1$ точек максимального уклонения от нуля.

3. Пусть заданы отображения $\varphi_\nu(x)$, $\nu = \overline{0, p}$, множества произвольной природы G в Y, где Y — подмножество кватернионов. Предполагаем, что функции (отображения) $\varphi_\nu(x)$, $\nu = \overline{0, p}$, образуют правую T-систему порядка p для полиномов $\sum_{\nu=0}^{p} a_\nu \varphi_\nu(x)$ (соответственно левую T-систему относительно полиномов $\sum_{\nu=0}^{p} \varphi_\nu(x) a_\nu$). Пусть $p = \max\{m, n\}$.

Теорема 3. *Любой фиксированный дробный полином* $(\not\equiv \text{const})$ *вида*

$$P \equiv P_m \frac{1}{Q_n(x)} \equiv \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu \varphi_\nu(x) \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{n} b_\nu \varphi_\nu(x)}, \quad Q_n(x) \neq 0 \tag{2}$$

(соответственно вида

$$P' \equiv \frac{1}{Q_n(x)} P_m \equiv \frac{1}{\sum_{\nu=0}^{n} \varphi_\nu(x) b_\nu} \sum_{\nu=0}^{m} \varphi_\nu(x) a_\nu, \quad Q_n(x) \neq 0), \tag{2'}$$

принимает какое-либо значение $L \in Y$ не более p раз.

Действительно, допуская противное, приходим к том, что P (соответственно P') равен постоянной, вопреки условию.

Следствие. *Действительный дробный полином вида* (2) $(\not\equiv \text{const})$ *принимает на G максимальное по абсолютной величине значение не более $2p$ раз, где $p = \max\{m, n\}$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Коромисліченко, Про чебишовське наближення із зв'язками та без зв'язків в деяких гіперкомплексних просторах, ДАН УРСР, № 6, 1966.
2. J. L. Walsh, Approximation to a Function, by a Polynomial in Another Function. The Mathem. Month., v. 76, N 9, 1966, 1049—1050.
3. Е. Я. Ремез и В. Д. Коромысличенко, Задача Вл. Маркова для полиномов системы функций Чебышева и понятие регулярной T-системы, ДАН СССР, т. 135, № 2, 1960.

Поступила 20.I 1971 г.,
после переработки — 19.I 1972 г.

Институт математики АН УССР