УДК 517.512.6.518.6.61

О решении неоднородной граничной задачи с непрерывно-дискретными параметрами при дискретных возмущениях

К. Я. Кухта

Рассмотрим часто встречающуюся в теории колебаний неоднородную граничную задачу

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(C(x)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) - I(x)\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = F(x, t), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{x=l} = 0. \tag{2}$$

Будем предполагать, что коэффициенты уравнения (1) на интервалах $l_{i-1} < x < l_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — кусочно-постоянные, а в точках $x = l_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ приложены дискретные массы $M_1, \ldots, M_{n-1}$ и дискретные возмущающие силы $F(x, t) = F_i(t) = F_i \sin\omega t$. Причем частота возмущающих сил ω не совпадает с собственной частотой системы, описываемой (1), (2).

Введем функцию $\theta(x, t) = \theta_i(x, t)$ при $l_{i-1} < x < l_i$, предполагая, что $\theta_i(x, t) = R_i(x)\sin\omega t$ и разделяя в (1) и (2) переменные, придем к граничной задаче

$$\frac{d^2R_i}{dx^2} + k_i^2R_i = 0, \quad k_i^2 = \frac{\omega^2 I_i}{C_i}, \tag{3}$$

$$R_1'(o) = 0, \quad R_n'(l_n) = 0. \tag{4}$$

Используя нормальную фундаментальную систему, общее решение уравнения (3) можно представить в виде

$$R_i(x) = A_iS_i(x - l_{i-1}) + B_iT_i(x - l_{i-1}). \tag{5}$$

Здесь $S_i(x - l_{i-1}) = \cos k_i(x - l_{i-1})$, $T_i(x - l_{i-1}) = \frac{1}{k_i}\sin k_i(x - l_{i-1})$.

Очевидно, что решение уравнения (5) в точках $x = l_i$ должно удовлетворять условиям сопряжения

$$R_{i+1}(l_i) = R_i(l_i),\ C_{i+1}R'_{i+1}(l_i) - C_i R'_i(l_i) = F_i - I_{M_i}\omega^2 R_i(l_i). \tag{6}$$

Второе условие сопряжения можно получить [1, 2], если проинтегрировать уравнение (1) в интервале $l_i + \varepsilon$, $l_i - \varepsilon$ и положить, что при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_{l_i-\varepsilon}^{l_i+\varepsilon} I(x)\,\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\,dx \to I_{M_i}\frac{\partial^2\theta_i}{\partial t^2}, \qquad \int\limits_{l_i-\varepsilon}^{l_i+\varepsilon} F(x,t)\,dx \to F_i(t). \tag{7}$$

Здесь I_{M_i} — конкретная физическая величина исследуемой колебательной системы. В частности, в задачах крутильных колебаний I_{M_i} — полярный массовый момент инерции i-й массы относительно центра жесткости.

Из свойств нормальной фундаментальной системы S_i и T_i и условий сопряжений (6) получим следующие зависимости:

$$A_{i+1} = R_{i+1}(l_i) = R_i(l_i) = A_i S_i(b_i) + B_i T_i(b_i), \quad b_i = l_i - l_{i-1}, \tag{8}$$

$$B_{i+1} = R'_{i+1}(l_i) = \frac{C_i R'_i(l_i) - I_{M_i}\omega^2 R_i(l_i) - F_1 r_i}{C_{i+1}} =$$

$$= \frac{-A_i\,[C_i k_i^2 T_i(b_i) + I_{M_i}\omega^2 S_i(b_i)] + B_i\,[C_i S_i(b_i) - I_{M_i}\omega^2 T_i(b_i)] - F_1 r_i}{C_{i+1}}.$$

Здесь $F_i = F_1 r_i$ при $i = 1$, $r_1 = 1$.

Из граничного условия при $x = 0$ следует, что $B_1 = 0$, тогда имеют место следующие зависимости:

$$A_i = A_1\varphi_i^{(1)} + F_1\mu_i^{(1)}, \quad B_i = A_1\varphi_i^{(2)} + F_1\mu_i^{(2)}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получим рекуррентные формулы для $\varphi_i^{(k)}$, $\mu_i^{(k)}$ $(k = 1, 2)$:

$$\varphi_{i+1}^{(1)} = \varphi_i^{(1)} S_i(b_i) + \varphi_i^{(2)} T_i(b_i), \quad \mu_{i+1}^{(1)} = \mu_i^{(1)} S_i(b_i) + \mu_i^{(2)} T_i(b_i), \tag{10}$$

$$\varphi_{i+1}^{(2)} = \frac{-\varphi_i^{(1)}\,[C_i k_i^2 T_i(b_i) + I_{M_i}\omega^2 S_i(b_i)] + \varphi_i^{(2)}\,[C_i S_i(b_i) - I_{M_i}\omega^2 T_i(b_i)]}{C_{i+1}},$$

$$\mu_{i+1}^{(2)} = \frac{-\mu_1^{(1)}\,[C_i k_i^2 T_i(b_i) + I_{M_i}\omega^2 S_i(b_i)] + \omega_i^{(2)}\,[C_i S_i(b_i) - I_{M_i}\omega^2 T_i(b_i)] - r_i}{C_{i+1}}.$$

Здесь $\varphi_1^{(1)} = 1$, $\varphi_1^{(2)} = 0$, $\mu_1^{(1)} = 0$, $\mu_1^{(2)} = 0$. Удовлетворяя граничные условия в $x = l_n$, найдем $C_{n+1}B_{n+1} = C_n R'_n(l_n) = 0$.

Используя зависимости (9), получим

$$C_{n+1}B_{n+1} = A_1(C_{n+1}\varphi_{n+1}^{(2)}) + F_1(C_{n+1}\mu_{n+1}^{(2)}) = 0.$$

Находим $A_1 = \dfrac{-F_1\widetilde{\mu}_{n+1}^{(2)}}{\widetilde{\varphi}_{n+1}^{(2)}}$, где $\widetilde{\varphi}_{n+1}^{(2)} \neq 0$ [3].

Коэффициенты $\widetilde{\mu}_{n+1}^{(2)}$, $\widetilde{\varphi}_{n+1}^{(2)}$ вычисляются по рекуррентным формулам (10), если положить $C_{n+1} = 1$, $I_{Mn} = 0$, $r_n = 0$. Определив A_1, находим A_i и B_i:

$$A_i = \frac{-F_1\widetilde{\mu}_{n+1}^{(2)}}{\widetilde{\varphi}_{n+1}^{(2)}}\varphi_i^{(1)} + F_1\mu_i^{(1)}, \quad B_i = -\frac{-F_1\widetilde{\mu}_{n+1}^{(2)}}{\widetilde{\varphi}_{n+1}^{(2)}}\varphi_i^{(2)} + F_1\mu_i^{(2)}. \qquad (11)$$

Решение неоднородной граничной задачи установившихся колебаний представляется функцией

$$\theta_i(x, t) = R_i(x)\sin\omega t = \left[\left(\frac{-F_1\widetilde{\mu}_{n+1}^{(2)}}{\widetilde{\varphi}_{n+1}^{(2)}}\varphi_i^{(1)} + F_1\mu_i^{(1)}\right)S_i(x - l_{i-1}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{-F_1\widetilde{\mu}_{n+1}^{(2)}}{\widetilde{\varphi}_{n+1}^{(2)}}\varphi_i^{(2)} + F_1\mu_i^{(2)}\right)T_i(x - l_{i-1})\right]\sin\omega t, \quad l_{i-1} < x < l_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (12)$$

Рассмотрим решение уравнения (1) при других граничных условиях.

а) Пусть $R_1(o) = 0$, $R_n'(l_n) = 0$. Тогда, пользуясь предыдущими рассуждениями, решение граничной задачи будет иметь вид (12), но при других начальных значениях $\varphi_1^{(k)}$, $\mu_1^{(k)}$ $(k = 1, 2)$: $\varphi_1^{(1)} = 0$, $\varphi_1^{(2)} = 1$, $\mu_1^{(1)} = 0$, $\mu_1^{(2)} = 0$.

б) Если $R_1(o) = 0$, $R_n(l_n) = 0$, тогда очевидно, что для неизвестных коэффициентов общего решения (5) справедливы зависимости

$$A_i = B_1\varphi_i^{(1)} + F_1\mu_i^{(1)}, \quad B_i = B_1\varphi_i^{(2)} + F_1\mu_i^{(2)}, \qquad (13)$$

причем $B_1 = \dfrac{-F_1\mu_{n+1}^{(1)}}{\varphi_{n+1}^{(1)}}$, где $\varphi_{n+1}^{(1)} \neq 0$ [3].

Решение неоднородной граничной задачи установившихся колебаний при данных граничных условиях представляется функцией

$$\theta_i(x, t) = \left[\left(-\frac{F_1\mu_{n+1}^{(1)}}{\varphi_{n+1}^{(1)}}\varphi_i^{(1)} + F_1\mu_i^{(1)}\right)S_i(x - l_{i-1}) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{-F_1\mu_{n+1}^{(1)}}{\varphi_{n+1}^{(1)}}\varphi_i^{(2)} + F_1\mu_i^{(2)}\right)T_i(x - l_{i-1})\right]\sin\omega t, \quad l_{i-1} < x < l_i,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Коэффициенты $\mu_{n+1}^{(1)}$ и $\varphi_{n+1}^{(1)}$ вычисляются по рекуррентным формулам (10).

Из рассмотренных граничных задач видим, что если частота возмущающих сил ω приближается к собственной частоте колеблющейся системы, будет наблюдаться явление резонанса [3]. Предположенный метод решения неоднородных граничных задач прост и удобен для реализации на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, «Наука», М., 1965.
2. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, Уравнения математической физики, ГИТТЛ, М.—Л., 1951.
3. К. Я. Кухта, Визначення частот і форм вільних крутильних коливань балки змінної маси і жорсткості з зосередженими вантажами, ДАН УССР, № 6, 1965.

Поступила 19.VII 1972 г.
Институт геотехнической механики АН УССР