УДК 517.944

О волновом уравнении теплопроводности

М. П. Ленюк

Рассмотрим гиперболическое, по И. Г. Петровскому, уравнение с постоянными коэффициентами

$$\mathfrak{L}[u] \equiv b_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1^2\frac{\partial u}{\partial t} + b_2^2 u - \left(\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} + \sum_{k=1}^{n} a_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = f(x,t), \quad (1)$$

которое при $b_0 = 0$ переходит в параболическое.

Обозначим фундаментальное решение (ф. р.) задачи Коши для уравнения (1) через $G_{\text{г}}$, а для соответствующего параболического уравнения через $G_{\text{п}}$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Фундаментальные решения задачи Коши для гиперболического уравнения* (1) *и соответствующего параболического уравнения связаны между собой таким соотношением*:

$$\lim_{b_0\to 0}\frac{1}{b_0^2}G_{\text{г}} = \frac{1}{b_1^2}G_{\text{п}}. \quad (2)$$

Доказательство. В силу непрерывности оператора Фурье справедливость равенства (2) достаточно показать в образах Фурье. Так как

$$\widetilde{G}_{\text{п}} = e^{-\frac{At}{b_1^2}},\ \widetilde{G}_{\text{г}} = \frac{b_0^2\exp\left(-\frac{b_1^2}{2b_0^2}t\right)}{\sqrt{b_1^4-4b_0^2A}}\left[e^{\sqrt{b_1^4-4b_0^2A}\frac{t}{2b_0^2}} - e^{-\sqrt{b_1^4-4b_0^2A}\frac{t}{2b_0^2}}\right],$$

где $A = \sum_{k,j=1}^{n} a_{kj}\lambda_k\lambda_j + i\sum_{k=1}^{n} a_k\lambda_k + b_2^2$, $\widetilde{G}$ — преобразование Фурье функции G, то имеем

$$\lim_{b_0\to 0}\frac{1}{b_0^2}\widetilde{G}_{\text{г}} = \lim_{b_0\to 0}\frac{\exp\left[\frac{-b_1^2+\sqrt{b_1^4-4b_0^2A}}{2b_0^2}t\right]-\exp\left[-\frac{b_1^2+\sqrt{b_1^4-4b_0^2A}}{2b_0^2}t\right]}{\sqrt{b_1^4-4b_0^2A}} =$$

$$= \frac{1}{b_1^2}\widetilde{G}_{\text{п}}.$$

Построим ограниченное решение уравнения (1), определенное в евклидовом пространстве $E_{n+1}^{+} = (0,T)\times E_n^{+} = (0,T)\times E_{n-1}\times(0,\infty) = \{(t,x) \equiv (t;x';x_n) \equiv (t;x_1,x_2,\ldots,x_{n-1};x_n),\quad 0<t<T\ (T\leqslant\infty),\ -\infty<x_j<+\infty\ (j=1,2,\ldots,n-1),\ 0<x_n<\infty\}$ и удовлетворяющее условиям

$$u|_{t=0} = f_1(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(x), \quad (3)$$

$$Bu|_{x_n=0} = \left(\sum_{k=1}^{n} h_k\frac{\partial}{\partial x_k} - \alpha_1\frac{\partial}{\partial t} - \alpha_2\right)u|_{x_n=0} = \varphi(x',t). \quad (4)$$

Определение 1. Функцией Коши задачи (1), (3), (4) будем называть функцию $K(t,x,\xi)$, которая удовлетворяет уравнению $\mathfrak{L}[u]=0$

и таким условиям:

$$K|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\partial K}{\partial t}\right|_{t=0}=\delta_\xi,\quad BK|_{x_n=0}=0,$$

где δ_ξ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$.

Определение 2. Функцией Грина задачи (1), (3), (4) будем называть функцию $W(t,\tau,x,\xi')$, которая удовлетворяет уравнению $\mathfrak{L}[u]=0$ и таким условиям:

$$W|_{t=\tau}=\left.\frac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=\tau}=0,\quad BW|_{x_n=0}=\delta_{(\tau,\xi')},$$

где $\delta_{(\tau,\xi')}$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $(\tau,\xi')=(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})$.

Определение 3. Фундаментальной функцией задачи (1), (3), (4) будем называть функцию $\mathcal{E}(t,\tau,x,\xi)$, которая удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{L}[u]=\delta(t-\tau,x-\xi)=\delta(t-\tau)\otimes\delta(x-\xi)=\delta_\tau\otimes\delta_\xi=\delta_{(\tau,\xi)},$$

нулевым начальным условиям и нулевому краевому условию, где $\delta_{(\tau,\xi)}$—мера Дирака, сосредоточенная в точке $(\tau,\xi)=(\tau,\xi_1,\ldots,\xi_n)$.

Поскольку уравнение (1) всегда можно свести к виду [1]

$$L[u]\equiv c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+c_1^2\frac{\partial u}{\partial t}+c_2^2u-a^2\Delta_n u=F(t,x),\tag{5}$$

где Δ_n — n-мерный оператор Лапласа, то достаточно решить поставленную задачу для уравнения (5), которое носит название волнового (обобщенного) уравнения теплопроводности. Так как обычное уравнение теплопроводности получается из уравнения (5) при $c_0=0$, то следует ожидать, что в пределе при $c_0\to 0$ получим решение соответствующей задачи для обычного (параболического) уравнения теплопроводности.

Фундаментальную функцию, функции Коши и Грина задачи (3) — (5) будем строить методами интегральных преобразований Фурье по x', Лапласа по t и зеркального отражения относительно гиперплоскости $x_n=0$ при помощи ф. р. задачи Коши для уравнения $L[u]=0$ [2].

Фундаментальное решение задачи Коши для уравнения $L[u]=0$ будем строить методом спуска [1], исходя из ф. р. задачи Коши для n-мерного волнового уравнения [3]. После увеличения пространства на одну размерность переменной z, замены переменных и элементарных преобразований в сферической системе координат получим: решение задачи Коши

$$L[u]=0,\quad u|_{t=0}=0,\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=f(x)$$

имеет вид

$$u(x,t)=\frac{\omega_n}{(2\pi a_1)^n}e^{-kt}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}\int\limits_{R\leqslant a_1t}(a_1^2t^2-R^2)^{\frac{n-1}{2}}M(a_1t,R)f(x+\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{\omega_n}{(2\pi a_1)^n}e^{-kt}\frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}[(a_1^2t^2-R^2)^{\frac{n-1}{2}}M(a_1t,R)J(a_1t-R)]*f(x),$$

где ω_n — площадь поверхности единичной сферы в E_n, $a_1^2=\dfrac{a^2}{c_0^2}$, $M(a_1t,R)=$

$$=\int\limits_0^1\frac{(1-\alpha^2)^{\frac{n-2}{2}}\operatorname{ch}c\sqrt{a_1^2t^2-R^2}\,\alpha}{[R^2+\alpha^2(a_1^2t^2-R^2)]^{\frac{n-1}{2}}}\,d\alpha,\ c^2=\frac{c_1^4-4c_0^2c_2^2}{4c_0^2a^2},\ R\left[\sum_{k=1}^n(x_k-\xi_k)^2\right]^{\frac{1}{2}}—$$

евклидово расстояние между точками x и ξ, $k=\dfrac{c_1^2}{2c_0^2}$.

Следовательно, ф. р. задачи Коши для уравнения $L[u]=0$

$$G(t, R)=\frac{\omega_n}{(2\pi a_1)^n} e^{-kt} \frac{\partial^{n-1}}{\partial t^{n-1}}[(a_1^2t^2-R^2)^{\frac{n-1}{2}} M(a_1t, R) J(a_1t-R)], \tag{6}$$

где $J(\beta)$ — функция Хевисайда.

Если $c_1=c_2=0$ $(c=0)$, то из формулы (6) после несложных преобразований получаем ф. р. задачи Коши для волнового уравнения в случае $n \geqslant 2$ [3]

$$G=\frac{\omega_{n-1}R^{-(n-2)}}{2(2\pi a_1)^{n-2}} \frac{\partial^{n-2}}{\partial t^{n-2}}[(a_1^2t^2-R^2)^{\frac{n-3}{2}} J(a_1t-R)].$$

Из формулы (6) получаем также выражения ф. р. задачи Коши для уравнения $L[u]=0$ в случае различной четности пространства геометрических переменных:

а) для нечетной размерности пространства

$$G=\frac{\exp(-kt)}{2a_1(2\pi a_1^2t)^{\frac{n-1}{2}}} \frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}}{\partial t^{\frac{n-1}{2}}}[I_0(c\sqrt{a_1^2t^2-R^2}) J(a_1t-R)]$$

$$(n=1, 3, 5, \ldots); \tag{7}$$

б) для четной размерности пространства

$$G=\frac{t\exp(-kt)}{(2\pi ta_1^2)^{\frac{n}{2}}} \frac{\partial^{\frac{n-2}{2}}}{\partial t^{\frac{n-2}{2}}}\left[\frac{\operatorname{ch} c\sqrt{a_1^2t^2-R^2}}{\sqrt{t^2-a_1^{-2}R^2}} J(a_1t-R)\right] \quad (n=2, 4, 6, \ldots). \tag{8}$$

Докажем ряд вспомогательных лемм.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{E}(t, x)$ — обобщенная функция в пространстве K_n', непрерывно зависящая от t как от параметра, и $\varphi(t, x)=\varphi(t, x_1, \ldots, x_n)$ — основная функция в пространстве K_{n+1} переменных $(t, x)=(t, x_1, \ldots, x_n)$. Тогда равенство*

$$\langle \mathcal{E}(t, x), \varphi(t, x)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\langle \mathcal{E}(t, x), \varphi(t, x)\rangle_x dt, \tag{9}$$

где $\langle\cdot\rangle_x$ означает применение функционала $\mathcal{E}$ к основной функции φ по координатам x при фиксированном t, определяет обобщенную функцию в пространстве K_{n+1}'.

Доказательство. Так как под знаком интеграла $\mathcal{E}(x, t)$ при фиксированном t применяется к основной функции $\varphi(x, t)$ как функции от x при том же значении t, то результатом является финитная функция по t, и интегрирование по t допустимо. Функционал $\mathcal{E}(x, t)$ является линейным и непрерывным на пространстве K_{n+1}. Действительно, имеем

1) $$\langle \mathcal{E}(t, x), \alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}\langle \mathcal{E}, \alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2\rangle_x dt=\int_{-\infty}^{\infty}[\langle \mathcal{E}, \alpha_1\varphi_1\rangle_x+$$
$$+\langle \mathcal{E}, \alpha_2\varphi_2\rangle_x]dt=\alpha_1\langle \mathcal{E}(t, x), \varphi_1(t, x)\rangle+\alpha_2\langle \mathcal{E}(t, x)\varphi_2(t, x)\rangle;$$

2) $$\lim_{\nu\to\infty}\langle \mathcal{E}(t, x), \varphi_\nu(t, x)\rangle=\lim_{\nu\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\langle \mathcal{E}(t, x), \varphi_\nu(t, x)\rangle_x dt=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{\nu\to\infty}\langle \mathcal{E}(t, x), \varphi_\nu(t, x)\rangle_x dt=0,$$

если $\varphi_\nu \underset{K_{n+1}}{\to} 0$. Следовательно, $\mathcal{E}(t, x)\in K_{n+1}'$.

Лемма 2. *Пусть* $G(t, x)$ — *фундаментальное решение задачи Коши для уравнения*

$$L[u] = \left[b_0^2 \frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u(t, x) = 0.$$

Тогда обобщенная функция $\mathscr{E}(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{1}{b_0^2} G(t, x) & \text{при } t \geqslant 0, \end{cases}$ *действующая на основные функции по правилу* (9), *является фундаментальной функцией* L, *т. е. удовлетворяет уравнению*

$$\left[b_0^2 \frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \mathscr{E}(t, x) = \delta(t, x).$$

Доказательство. Так как

$$\int_0^\infty \langle G(t, x), \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle_x dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t} \langle G, \varphi \rangle_x dt - \int_0^\infty \langle \frac{\partial G}{\partial t}, \varphi \rangle_x dt =$$

$$= -\langle G(0, x), \varphi(0, x) \rangle - \int_0^\infty \langle \frac{\partial G}{\partial t}, \varphi \rangle_x dt = -\varphi(0, 0) -$$

$$- \int_0^\infty \langle \frac{1}{b_0^2} P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) G, \varphi \rangle_x dt,$$

то

$$\langle \left[b_0^2 \frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \mathscr{E}(t, x), \varphi(t, x) \rangle = \int_{-\infty}^\infty \langle \left[b_0^2 \frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \mathscr{E}(t, x),$$

$$\varphi(t, x) \rangle_x dt = \int_0^\infty \langle \left[b_0^2 \frac{\partial}{\partial t} - P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \frac{1}{b_0^2} G(t, x), \varphi(t, x) \rangle_x dt =$$

$$= \int_0^\infty \langle G(t, x), \left[-\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{b_0^2} \overline{P}\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \varphi(t, x) \rangle_x dt = -\int_0^\infty \langle G, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \rangle_x dt -$$

$$- \int_0^\infty \langle G, \frac{1}{b_0^2} \overline{P}\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) \varphi \rangle_x dt = \varphi(0, 0) + \int_0^\infty \langle \frac{1}{b_0^2} P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) G, \varphi \rangle_x dt -$$

$$- \int_0^\infty \langle \frac{1}{b_0^2} P\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right) G, \varphi \rangle_x dt = \varphi(0, 0) = \langle \delta(t, x), \varphi(t, x) \rangle.$$

Лемма 3. *Пусть* $G(t, x)$ — *фундаментальное решение задачи Коши для уравнения*

$$L[u] = \left[b_0^2 \frac{\partial^m}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} P_k\left(i \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] u = 0. \qquad (10)$$

Тогда обобщенная функция $\mathscr{E}(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{1}{b_0^2} G & \text{при } t \geqslant 0, \end{cases}$ *действующая на основные функции по правилу* (9), *является фундаментальной функцией* *оператора L, т. е. удовлетворяет уравнению*

$$\left| b_0^2 \frac{\partial^m}{\partial t^m} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\partial^k}{\partial t^k} P_k \left(i \frac{\partial}{\partial x} \right) \right| \mathcal{E}(t, x) = \delta(t, x).$$

Доказательство состоит в приведении уравнения (10) к системе первого порядка и применении к вектор-функции леммы 2.

Лемма 4. *Пусть выполнены условия*

$$\operatorname{Re} \alpha_2 > 0, \ \operatorname{Re} h_n > 0, \ \operatorname{Re} [\alpha_2 + \alpha_1 p + i (h', \lambda') + h_n q] \neq 0 \ (> 0). \qquad (11)$$

Тогда функции Коши, Грина и фундаментальная функция задачи (4)—(6) *определяются по формулам*

$$K(t, x, \xi) = G(t, x' - \xi', x_n - \xi_n) + \mathfrak{M}_\xi G(t, x' - \xi', x_n - \xi_n) =$$

$$= G(t, x' - \xi', x_n - \xi_n) - G(t, x' - \xi', x_n + \xi_n) - 2h_n \int_0^\infty e^{-\alpha_2 y} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \xi_n} G(t - \alpha_1 y, x' - \xi' - h' y, x_n + \xi_n + h_n y)\, dy, \qquad (12)$$

$$W(t, \tau, x', \xi', x_n) = \frac{2a^2}{c_0^2} \int_0^\infty e^{-\alpha_2 y} \frac{\partial}{\partial x_n} G(t - \alpha_1 y - \tau, x' - \xi' - h' y, x_n + h_n y)\, dy, \qquad (13)$$

$$\mathcal{E}(t, \tau, x, \xi) = \frac{1}{c_0^2} K(t - \tau, x, \xi) J(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leqslant \tau, \\ \dfrac{1}{c_0^2} K & \text{при } t > \tau, \end{cases} \qquad (14)$$

где $\lambda' = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1})$, $\lambda'^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^2$, $h' = (h_1, h_2, \ldots, h_{n-1})$, $(h', \lambda') = \sum_{k=1}^{n-1} h_k \lambda_k$,
$q = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 \lambda'^2 + c_0^2 p^2 + c_1^2 p + c_2^2}$ $(p = p_1 + i p_2,\ p_1 > 0,\ -\infty < p_2 < +\infty)$,
$R^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - \eta_k)^2 = |x' - \eta'|^2 + (x_n - \eta_n)^2$, $G(t - \tau, x' - \eta', x_n - \eta_n) \equiv G(t - \tau, R)$ — *ф. р. задачи Коши для уравнения* $L[u] = 0$.

Доказательство. Носители обобщенных функций $\mathfrak{M}_\xi G$ и W есть множества точек, координаты которых имеют вид

$$(\alpha_1 y, \xi_1 + h_1 y, \ldots, \xi_{n-1} + h_{n-1} y, -\xi_n - h_n y), \quad 0 \leqslant \xi_n < \infty,$$

$$(\tau + \alpha_1 y, \xi_1 + h_1 y, \ldots, \xi_{n-1} + h_{n-1} y, -h_n y), \quad 0 \leqslant y < \infty.$$

В силу условий (11) эти множества расположены в полупространстве $x_n \leqslant -h_n y$, а поэтому не имеют общих точек с E_{n+1}^+. Это значит, что

$$\lim_{t \to \tau} W = \lim_{t \to \tau} \frac{\partial W}{\partial t} = 0, \ \lim_{t \to 0} K = \lim_{t \to 0} G + \lim_{t \to 0} \mathfrak{M}_\xi G = 0,$$

$$\lim_{t \to 0} \frac{\partial K}{\partial t} = \lim_{t \to 0} \frac{\partial G}{\partial t} + \lim_{t \to 0} \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{M}_\xi G = \delta_\xi + 0 = \delta_\xi,$$

т. е. начальные условия выполнены. То, что функция K при любом $\xi \in E_n^+$ удовлетворяет граничному условию, вытекает из соотношения

$$B\left[e^{-\alpha_2 y}\frac{\partial}{\partial \xi_n} G(t-\alpha_1 y, x'-\xi'-h'y, x_n+\xi_n+h_n y)\right]=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left[e^{-\alpha_2 y}\frac{\partial}{\partial x_n} G(t-\alpha_1 y, x'-\xi'-h'y, x_n+\xi_n+h_n y)\right].$$

Покажем, что функция W удовлетворяет краевому условию. Пусть $\mathfrak{P}$ — пространство основных на $(0, T)\times E_{n-1}$ функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, t)$. Тогда по равенству Парсеваля [2] имеем

$$\langle BW, f\rangle|_{x_n=0} = -i(2\pi)^{-n}\left\langle\left(h_n\frac{d}{dx_n} - i\sum_{k=1}^{n-1}h_k\lambda_k - \alpha_1 p - \alpha_2\right)\widetilde{W}, \widetilde{f}\right\rangle|_{x_n=0} =$$

$$= -\frac{i}{(2\pi)^n}\left\langle\left(h_n\frac{d}{dx_n} - i\sum_{k=1}^{n-1}h_k\lambda_k - \alpha_1 p - \alpha_2\right)\left(\frac{2a^2}{c_0^2}\int_0^\infty e^{-\alpha_2 y}\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{c_0^2}{2a^2 q}\times\right.\right.$$

$$\left.\times\exp[-\tau p - \alpha_1 yp - i(\lambda', \xi') - i(\lambda', h')y - (x_n+h_n y)q]\,dy, \widetilde{f}\right\rangle|_{x_n=0} =$$

$$= -i(2\pi)^{-n}\left\langle\exp\left(-x_n q - \tau p - i\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k\xi_k\right), \widetilde{f}\right\rangle|_{x_n=0} = \langle\delta_{(\tau,\xi')}, f\rangle.$$

То, что функции K и W удовлетворяют однородному уравнению (5), а функция $\mathscr{E}$ удовлетворяет нулевым начальным и краевому условиям, проверяется непосредственно, так как условия (11) позволяют дифференцировать под знаком интегралов. Осталось доказать, что функция $\mathscr{E}$ удовлетворяет уравнению $L[\mathscr{E}] = \delta_{(\tau,\xi)}$. Так как $\operatorname{supp}\mathfrak{M}_\xi G \,\overline{\in}\, E_{n+1}^+$, то достаточно показать, что $L[\mathscr{E}_1(t, x)] = \delta(t, x)$, где

$$\mathscr{E}_1(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } t\leqslant 0,\\ \dfrac{1}{c_0^2}G(t, x) & \text{при } t>0.\end{cases}$$

Последнее справедливо в силу леммы 3.

Теорема 2. *Если выполнены условия* (11), *то решение задачи* (4) — (6) *определяется по формуле*

$$u(t, x) = \int_{E_n^+}\left\{K(t, x, \xi)\left[f_2(\xi) + \frac{c_1^2}{c_0^2}f_1(\xi)\right] + \frac{\partial K}{\partial t}f_1(\xi)\right\}d\xi +$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{E_{n-1}} W(t, \tau, x, \xi')\,\varphi(\xi', \tau)\,d\xi' + \int_0^t d\tau\int_{E_n^+}\mathscr{E}(t, \tau, x, \xi)\,F(\xi, \tau)\,d\xi. \quad (15)$$

Доказательство. Перепишем формулу (15) так:

$$u = K\underset{x}{*}\left(f_2 + \frac{c_1^2}{c_0^2}f_1\right) + \frac{\partial K}{\partial t}\underset{x}{*}f_1 + W\underset{x'}{*}\underset{t}{*}\varphi + \mathscr{E}\underset{x}{*}\underset{t}{*}F.$$

Если воспользоваться свойствами функций K, W, $\mathscr{E}$ и теоремами о непрерывности и дифференцированности свертки [2], учитывая, что

$$\left[\frac{\partial^2 K}{\partial t^2} * f_1\right]\Big|_{t=0} = \left\{\left[\left(\frac{a^2}{c_0^2}\Delta - \frac{c_1^2}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\right)K\right] * f_1\right\}\Big|_{t=0} = -\frac{c_1^2}{c_0^2}f_1,$$

то справедливость формулы (15) очевидна.

С л е д с т в и е 1. *Если обозначить функции Коши, Грина и фундаментальную функцию соответствующей параболической задачи*

$$c_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = F(t, x), \quad u|_{t=0} = f_1(x), \quad Bu|_{x_n=0} = \varphi(t, x') \tag{16}$$

через K_n, W_n, $\mathcal{E}_n$, *то в силу теоремы* 1 *и леммы* 4 *получаем*

$$K_n = \lim_{c_0 \to 0} \frac{c_1^2}{c_0^2} K, \quad W_n = \lim_{c_0 \to 0} W, \quad \mathcal{E}_n = \lim_{c_0 \to 0} \mathcal{E}. \tag{17}$$

С л е д с т в и е 2. *Если обозначить через* $v(t, x)$ *решение задачи* (16), *то из формулы* (15) *в силу соотношений* (17) *имеем*

$$v(t, x) = \lim_{c_0 \to 0} u(t, x).$$

З а м е ч а н и е. Теорема 1 без привлечения новых идей переносится на гиперболические системы

$$b_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} + b_2^2 u = A\left(t, \frac{\partial}{\partial x}\right) u.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. К у р а н т, Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1964.
2. А. Ф. Ш е с т о п а л, Разложения по фундаментальным решениям эллиптических операторов, «Наукова думка», К., 1968.
3. Г. Е. Ш и л о в, Математический анализ, Второй специальный курс, «Наука», М., 1965.

Поступила 24.III 1972 г.,
после переработки — 15.VI 1972 г.

Черновицкий государственный университет