УДК 517.929

О построении решений для уравнения второго порядка с запаздыванием, описывающего колебательные процессы со значительной силой сопротивления в резонансном случае

Ле Суан Кан

1. Данная работа, являющаяся продолжением [1], посвящена построению приближенных решений для уравнения второго порядка с запаздыванием, описывающего колебательные процессы со значительной силой сопротивления и внешним возмущением, к рассмотрению которого приводит нас исследование устойчивых систем автоматического регулирования, устойчивых генераторов и др.

Рассматриваемое нами уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2b_1\frac{dx(t)}{dt}+2b_2\frac{dx(t-\varepsilon\Delta)}{dt}+\omega_1^2x(t)+\omega_2^2x(t-\varepsilon\Delta)=$$
$$=\varepsilon F\left|\nu t, x(t), x(t-\varepsilon\Delta), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{dx(t-\varepsilon\Delta)}{dt}\right], \qquad (1)$$

где ε — положительный малый параметр, Δ — положительное запаздывание, b_1, b_2 — положительные постоянные, удовлетворяющие неравенству

$\omega_1^2+\omega_2^2>(b_1+b_2)^2$; ν — частота внешней силы; F — функция, которая может быть представлена в виде конечной суммы Фурье

$$F(\theta, z_1, z_2, z_3, z_4)=\sum_{n=-N}^{N} F_n(z_1, z_2, z_3, z_4)\, e^{in\theta},$$

коэффициенты которой в свою очередь являются некоторыми полиномами для z_1, z_2, z_3, z_4. Порождающее уравнение, соответствующее (1), имеет вид:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+2b\frac{dx(t)}{dt}+\omega^2x(t)=0, \tag{2}$$

где $b=b_1+b_2$, $\omega^2=\omega_1^2+\omega_2^2$. При сделанных предположениях находится его общее решение

$$x(t)=ae^{-bt}\cos(\omega_0t+\alpha), \tag{3}$$

где a, α — произвольные постоянные, ω_0 — собственная частота системы, которая равна $\omega_0=\sqrt{\omega^2-b^2}$.

При исследовании колебательных процессов, описываемых уравнением (1), представляет интерес тот случай «резонансный», когда частота внешней силы и собственная частота порождающей системы ω_0 удовлетворяет условию $\omega_0\approx\frac{p}{q}\nu$, где p и q — целые взаимно простые числа. В связи с этим в данной работе исследуется резонансный случай.

2. Для построения приближенных решений уравнения (1) сначала введем в уравнение (1) новые переменные a и φ согласно формулам

$$x=ae^{-bt}\cos\left(\frac{p}{q}\nu t+\varphi\right),\ \frac{dx}{dt}=-ae^{-bt}\left[b\cos\left(\frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)+\right.$$
$$\left.+\omega_0\sin\left(\frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)\right]. \tag{4}$$

После ряда выкладок для новых переменных a, φ вместо (1) получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{da}{dt}=-\frac{\varepsilon}{\omega_0}\left\{F_0\left(\nu t, ae^{-bt}, \frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)e^{bt}\sin\left(\frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)-\right.$$
$$-\Delta a\left[(2b_2\omega_0^2-2b_2b^2+\omega_2^2b)\cos\left(\frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)\sin\left(\frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\omega_0(\omega_2^2-4b_2b)\sin^2\left(\frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)\right]\right\}+\varepsilon^2\ldots,$$

$$\frac{d\varphi}{dt}=\omega_0-\frac{p}{q}\nu-\frac{\varepsilon}{\omega_0}\left\{F_0\left(\nu t, ae^{-bt}, \frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)\frac{e^{bt}}{a}\cos\left(\frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)-\right.$$
$$-\Delta\left[(2b_2\omega_0^2-2b_2b^2+\omega_2^2b)\cos^2\left(\frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)+\right.$$
$$\left.\left.+\omega_0(\omega_2^2-4b_2b)\cos\left(\frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)\sin\left(\frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)\right]\right\}+\varepsilon^2\ldots, \tag{5}$$

где

$$F_0\left(\nu t, ae^{-bt}, \frac{p}{q}\nu t+\varphi\right)=F_0\left[\nu t, ae^{-bt}\cos\left(\frac{p}{q}\nu t+\varphi\right), ae^{-bt}\cos\left(\frac{p}{q}\nu t+\right.\right.$$

$$+ \varphi\Big), -ae^{-bt}\left(b\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right) + \omega_0 \sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right)\right),$$

$$-ae^{-bt}\left(b\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right) + \omega_0 \sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right)\right)\Big].$$

Произведя в системе (5) замену переменных

$$a = ce^{bt}, \varphi = \varphi, \tag{6}$$

получаем для новых переменных c, φ систему уравнений, эквивалентную системе (5):

$$\frac{dc}{dt} = -bc - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left\{F_0\left(\nu t, c, \frac{p}{q}\nu t + \varphi\right)\sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right) + \right.$$

$$+ \Delta c\left[(2b_2 b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b)\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right)\sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \omega_0 (4b_2 b - \omega_2^2)\sin^2\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right)\right]\right\} + \varepsilon^2 \ldots,$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 - \frac{p}{q}\nu - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left\{\frac{1}{c} F_0\left(\nu t, c, \frac{p}{q}\nu t + \varphi\right)\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right) + \right.$$

$$+ \Delta\left[(2b_2 b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b)\cos^2\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right) + \omega_0 (4b_2 b - \right.$$

$$\left.\left. - \omega_2^2)\cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right)\sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right)\right]\right\} + \varepsilon^2 \ldots. \tag{7}$$

Введем теперь в рассмотрение следующие функции:

$$u\left(\nu t, c, \frac{p}{q}\nu t + \varphi\right) = u_0(c, \varphi) + \sum_{nq+mp\neq 0} u_{n,m}(c)\, e^{i\left(n+m\frac{p}{q}\right)\nu t + im\varphi},$$

$$v\left(\nu t, c, \frac{p}{q}\nu t + \varphi\right) = v_0(c, \varphi) + \sum_{nq+mp\neq 0} v_{n,m}(c)\, e^{i\left(n+m\frac{p}{q}\right)\nu t + im\varphi}, \tag{8}$$

в которых положено

$$u_{n,m}(c) = -\frac{1}{b} c^{\frac{i(n\nu+m\omega_0)}{b}+1}\int L_{n,m}(c)\, c^{-\frac{i(n\nu+m\omega_0)}{b}-2}\, dc,$$

$$v_{n,m}(c) = -\frac{1}{b} c^{\frac{i(n\nu+m\omega_0)}{b}}\int M_{n,m}(c)\, c^{-\frac{i(n\nu+m\omega_0)}{b}-1}\, dc,$$

где

$$L_{0,2}(c) = g_{0,2}(c) - \frac{\Delta}{4} c\,[(4b_2 b - \omega_2^2)\,\omega_0 + (2b_2 b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b)\, i],$$

$$L_{0,-2}(c) = g_{0,-2}(c) - \frac{\Delta}{4} c\,[(4b_2 b - \omega_2^2)\,\omega_0 - (2b_2 b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b)\, i],$$

$L_{n,m}(c) = g_{n,m}(c)$ для n, m, не одновременно удовлетворяющих равенствам $n = 0$, $m = \pm 2$,

$$M_{0,2}(c) = \frac{h_{0,2}(c)}{c} + \frac{\Delta}{4}[(2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b) - (4b_2b - \omega_2^2)\omega_0 i],$$

$$M_{0,-2}(c) = \frac{h_{0,-2}(c)}{c} + \frac{\Delta}{4}[(2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b) + (4b_2b - \omega_2^2)\omega_0 i],$$

$M_{n,m}(c) = \dfrac{h_{n,m}(c)}{c}$ для n, m, не одновременно удовлетворяющих равенствам $n = 0,\ m = \pm 2$,

$$g_{n,m}(c) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_0 \sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right) e^{-i\left(n+m\frac{p}{q}\right)\nu t - im\varphi}\, d(\nu t)\, d\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right),$$

$$h_{n,m}(c) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_0 \cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right) e^{-i\left(n+m\frac{p}{q}\right)\nu t - im\varphi}\, d(\nu t)\, d\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi\right).$$

Здесь выражения для функций $u_0(c, \varphi)$ и $v_0(c, \varphi)$ пока что неизвестны и будут в дальнейшем определены в зависимости от дополнительных условий, накладываемых на величину c.

Сделаем в системе уравнений (7) замену переменных

$$c = c_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0} u\left(\nu t, c_1, \frac{p}{q}\nu t + \varphi_1\right), \quad \varphi = \varphi_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0} v\left(\nu t, c_1, \frac{p}{q}\nu t + \varphi_1\right). \tag{9}$$

Подставляя выражения (9) в систему (7), решая их относительно $\dfrac{dc_1}{dt}$, $\dfrac{d\varphi_1}{dt}$, находим:

$$\frac{dc_1}{dt} = -bc_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left[bc_1\frac{\partial u_0}{\partial c_1} - \left(\omega_0 - \frac{p}{q}\nu\right)\frac{\partial u_0}{\partial \varphi_1} - bu_0 + \right.$$
$$\left. + \sum_\sigma g_{-p\sigma, q\sigma}(c_1)\, e^{iq\sigma\varphi_1} + \frac{\Delta}{2} c_1 (4b_2b - \omega_2^2)\omega_0\right] + \varepsilon^2 \ldots, \tag{10}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_0 - \frac{p}{q}\nu - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left[bc_1\frac{\partial v_0}{\partial c_1} - \left(\omega_0 - \frac{p}{q}\nu\right)\frac{\partial v_0}{\partial \varphi_1} + \right.$$
$$\left. + \sum_\sigma \frac{1}{c_1} h_{-p\sigma, q\sigma}(c_1)\, e^{iq\sigma\varphi_1} + \frac{\Delta}{2}(2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b)\right] + \varepsilon^2 \ldots$$

Пренебрегая в правых частях системы уравнений (10) величинами порядка малости ε^2, получаем в первом приближении систему уравнений

$$\frac{dc_1}{dt} = -bc_1 - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left[bc_1\frac{\partial u_0}{\partial c_1} - \left(\omega_0 - \frac{p}{q}\nu\right)\frac{\partial u_0}{\partial \varphi_1} - bu_0 + \right.$$
$$\left. + \sum_\sigma g_{-p\sigma, q\sigma}(c_1)\, e^{iq\sigma\varphi_1} + \frac{\Delta}{2} c_1 (4b_2b - \omega_2^2)\omega_0\right], \tag{11}$$

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_0 - \frac{p}{q}\nu - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left[bc_1\frac{\partial v_0}{\partial c_1} - \left(\omega_0 - \frac{p}{q}\nu\right)\frac{\partial v_0}{\partial \varphi_1} + \right.$$
$$\left. + \sum_\sigma \frac{1}{c_1} h_{-p\sigma, q\sigma}(c_1)\, e^{iq\sigma\varphi_1} + \frac{\Delta}{2}(2b_2b^2 - 2b_2\omega_0^2 - \omega_2^2 b)\right].$$

Итак, с помощью ряда последовательных замен переменных в первом приближении интегрирование дифференциального уравнения с запаздыванием (1) сводится к интегрированию двух обыкновенных дифференциальных уравнений (11). Очевидно, что интегрирование системы (11) во много раз легче, чем интегрирование непосредственно уравнения (1).

В резонансном случае неавтономной системы, как известно, фаза колебаний φ существенно влияет на величину амплитуды колебаний. В этом случае это видно непосредственно из уравнений первого приближения (11).

Первое приближение для решения уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = c_1 \cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi_1\right) - \frac{\varepsilon}{\omega_0}\left[u \cos\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi_1\right) - c_1 v \sin\left(\frac{p}{q}\nu t + \varphi_1\right)\right], \tag{12}$$

где u, v имеют вид (8), c_1, φ_1 определяются из системы уравнений (11).

Перейдем теперь к определению функций $u_0(c, \varphi)$, $v_0(c, \varphi)$, входящих в выражения (8), которые, ввиду произвольности этих функций, пока что неоднозначно определяют функции u, v. Для того, чтобы выражения (8) были однозначны, необходимы некоторые дополнительные условия. Здесь потребуем, чтобы после того, как совершим в системе (7) замену переменных (8), новая переменная c_1 тоже являлась полной амплитудой основной гармоники колебаний с точностью до величин первого порядка малости включительно.

После ряда элементарных вычислений находим:

$$u_0 = -\frac{1}{2}\sum_{\sigma}\left[(u_{-p\sigma, q\sigma-2} + u_{-p\sigma, q\sigma+2}) + ic\,(v_{-p\sigma, q\sigma-2} - v_{-p\sigma, q\sigma+2})\right] e^{iq\sigma\varphi}, \tag{13}$$

$$v_0 = \frac{1}{2c}\sum_{\sigma}\left[-i\,(u_{-p\sigma, q\sigma-2} - u_{-p\sigma, q\sigma+2}) + c\,(v_{-p\sigma, q\sigma-2} + v_{-p\sigma, q\sigma+2})\right] e^{iq\sigma\varphi}.$$

Совершенно аналогично, принимая во внимание слагаемые порядка малости ε^2 включительно в системе уравнений (10), произведя замену переменных

$$c_1 = c_2 - \frac{\varepsilon^2}{\omega_0} u_1\left(\nu t, c_2, \frac{p}{q}\nu t + \varphi_2\right), \quad \varphi_1 = \varphi_2 - \frac{\varepsilon^2}{\omega_0} v_1\left(\nu t, c_2, \frac{p}{q}\nu t + \varphi_2\right), \tag{14}$$

где функции u_1, v_1 имеют тот же вид, что функции u, v, и пренебрегая в правых частях преобразованных уравнений величинами порядка малости ε^3, получим систему уравнений второго приближения.

3. Пример. Рассмотрим параметрическое возбуждение колебаний в генераторе с запаздывающей обратной связью, которое описывается уравнением

$$\ddot{x}(t) + 2\delta\dot{x}(t) + [\omega^2 + \varepsilon h \cos(\nu t)]\, x(t - \varepsilon\Delta) = \varepsilon\alpha\,[1 - \beta x^2(x)]\,\dot{x}(t - \varepsilon\Delta), \tag{15}$$

где δ, h, x, β, Δ — положительные постоянные, ε — малый положительный параметр, δ и ω удовлетворяют условию $\omega > \delta$. Будем еще предполагать, что выполняется резонансное отношение $\nu \approx 2\omega_0$, где $\omega_0 = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}$ — собственная частота колебаний. Для такого случая, когда $\delta = \varepsilon\lambda$, уравнение (15) было рассмотрено В. П. Рубаником [2].

С помощью указанного метода после ряда выкладок в первом приближении получаем:

$$x(t) = c_1 \cos\left(\frac{\nu}{2}t + \varphi_1\right) + \frac{\varepsilon}{4\omega_0}\left[\left(\frac{3\alpha\delta c_1}{2\omega_0} + \frac{\alpha\beta\delta\omega_0 c_1^3}{4\,(4\omega_0^2 + \delta^2)}\right)\cos 3\left(\frac{\nu}{2}t + \varphi_1\right) + \right.$$

$$
+\left(\frac{3}{2}\alpha c_1-\alpha\beta c_1^3+\frac{\alpha\beta c_1^3(2\omega_0^2+\delta^2)}{4(4\omega_0^2+\delta^2}\right)\sin 3\left(\frac{\nu}{2}t+\varphi_1\right)+
$$

$$
+\frac{hc_1(\nu+8\omega_0)}{4\nu(\nu+2\omega_0)}\cos\left(\frac{3}{2}\nu t+\varphi_1\right)+\frac{hc_1}{4(\nu+2\omega_0)}\cos\left(\frac{5}{2}\nu t+\varphi_1\right)\Bigg], \qquad (16)
$$

где c_1, φ_1 определяются системой уравнений

$$
\frac{dc_1}{dt}=-\delta c_1+\frac{\varepsilon c_1}{2}\left[\Delta\omega^2+\alpha\left(1-\frac{1}{4}\beta c_1^2\right)+\frac{h}{\nu}\sin 2\varphi_1-\frac{\alpha\beta\delta^2c_1^2}{2(\omega_0^2+\delta^2)}\right],
$$

$$
\frac{d\varphi_1}{dt}=\omega_0-\frac{\nu}{2}+\frac{\varepsilon}{2}\left[\frac{\Delta\omega^2\delta}{\omega_0}+\frac{\alpha\delta}{\omega_0}\left(1+\frac{1}{4}\beta c_1^2\right)+\frac{h}{\nu}\cos 2\varphi_1+\frac{\alpha\beta\delta^3c_1^3}{2(\omega_0^2+\delta^2)\,\omega_0}\right].
$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Ле Суан Кан, О построении приближенных решений для автономного дифференциально-разностного уравнения второго порядка, описывающего колебательные процессы со значительной силой сопротивления, УМЖ, т. 23, № 6, 1971.
2. В. П. Рубаник, Колебания квазилинейных систем с запаздыванием, «Наука», М., 1969.

Поступила 4.V 1972 г.
Институт математики АН УССР