УДК 517.946

Интегральные оценки производных решений однородных уравнений эллиптического типа с пониженными требованиями на класс гладкости границы области

А. С. Фохт

В работах [1, 2] была получена оценка частных производных D^s *и* любого порядка s решения u линейного однородного уравнения эллиптического типа любого порядка с переменными коэффициентами, заданного на ограниченной области $G \subset R_n$ с достаточно гладкой границей $\Gamma \subset C^{(s+1)}$ в метрике L_2:

$$\int\limits_G (D^s u)^2 t^{2s} dG \leqslant C_s \int\limits_G u^2 dG, \tag{1}$$

где $t = t(x)$ — расстояние от точки $x \in G$ до границы Γ области G, $C_s > 0$ — константа, не зависящая от x и $u(x)$.

В данной работе улучшим этот результат, построив специальную вспомогательную функцию. В результате будет доказана такая теорема.

Теорема 1. *Для любой ограниченной области $G \subset R_n$ с границей Γ, имеющей ограниченную вариацию, имеет место оценка* (1), *где u — любое решение линейного однородного уравнения эллиптического типа с достаточно гладкими коэффициентами.*

Вопрос сводится к удачному построению вспомогательной функции, что следует из методов, развитых в работах [1—3].

Лемма 1. *Пусть $\zeta \subset E^n$, т. е. $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$, $|\zeta| = 1$. Можно построить функцию $\theta(\zeta)$ (см. замечание 2), удовлетворяющую условиям:*

$$\theta(\zeta) \geqslant 0,\ \theta(\zeta) = \widetilde{\theta}(\zeta_1,\ \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}),\ \theta(\zeta) \in C_0^\infty(E^n).$$

Последнее условие, как принято, означает, что $\theta(\zeta)$ — бесконечно дифференцируемая на всем пространстве функция, равная нулю вне некоторого носителя (в нашем случае вне шара радиуса единица). Область $G \subset R_n$ является звездной, а ее граница Γ имеет ограниченную вариацию. Тогда для любой точки $x \in G$ верна формула

$$\rho^{n-1}(x) = \int\limits_\Gamma \theta\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right)\frac{d\Gamma}{|y-x|^{n-1}}. \tag{2}$$

Доказательство. Область G — звездная. Это означает, что всякий луч, проведенный из произвольной точки $x \in G$ один и только один раз пересекает поверхность Γ. Выберем некоторую точку $x \in G$ и создадим поверхность Γ^1, образованную из поверхности путем сжатия в $\rho(x)$ раз по направлению каждого луча, проведенного из точки x до пересечения с Γ, где $\rho(x)$ — расстояние от точки $x \in G$ до поверхности Γ. Из этого построения следует, что

$$\frac{d\Gamma}{\rho^{n-1}(x)\,|y-x|^{n-1}} = \frac{d\Gamma^1}{|z-x|^{n-1}} \quad (z \in \Gamma^1,\ y \in \Gamma) \tag{3}$$

(будем считать, что размерность Γ, Γ^1, $d\Gamma$, $d\Gamma^1$ есть $(n-1)$, $\rho(x)$ — безразмерная величина — отношение расстояния от точки $x \in G$ до Γ к некоторой длине, равной единице). Поместим в точке x некий источник, плотность потока у которого в направлении вектора $z - x$ ($z \in \Gamma^1$) такова:

$$\theta\left(\frac{z-x}{|z-x|}\right)\frac{1}{|z-x|^{n-1}}. \tag{4}$$

Тогда полный поток Φ сквозь поверхность Γ^1 будет:

$$\Phi = \int_{\Gamma^1} \theta\left(\frac{z-x}{|z-x|}\right) \frac{d\Gamma^1}{|z-x|^{n-1}} \quad (z \in \Gamma^1). \tag{5}$$

Не умаляя общности, вводим нормировку потока: $\Phi = 1$.
Из последних четырех формул следует, что

$$\int_{\Gamma} \theta\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right) \frac{d\Gamma}{|y-x|^{n-1}\rho^{n-1}(x)} = 1; \tag{6}$$

или в силу того, что $\rho(x)$ не связано с переменными интегрирования, окончательно получим

$$\rho^{n-1}(x) = \int_{\Gamma} \theta\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right) \frac{d\Gamma}{|y-x|^{n-1}} \quad (y \in \Gamma), \tag{7}$$

что и требовалось показать.

Замечание 1. Формула (7) имеет смысл, если существует записанный в ней интеграл. Это — интеграл Стильтьеса, где под знаком дифференциала стоит функция $\Gamma = \Gamma(y)$. Мы предположили, что эта функция имеет ограниченную вариацию. Как известно [4, теорема 1], в этом случае интеграл в смысле Стильтьеса существует.

Замечание 2. В лемме 1 постулируется существование функции $\theta(\zeta)$. В самом деле, в качестве нее можно взять

$$\theta(\zeta) = \widetilde{\theta}(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}) = \lambda \exp\left[-\frac{1}{1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} \zeta_i^2}\right],$$

где λ находится из условия нормировки $\theta(\zeta) \to 0$ при $\sum\limits_{i=1}^{n-1} \zeta_i^2 \to 1 - 0$.

Лемма 2. *Для любой непрерывной замкнутой поверхности Γ с ограниченной вариацией и любой точки $x \in G$ справедлива формула*:

$$\rho^{n-1}(x) = \int_{\Gamma^*} \theta\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right) \frac{d\Gamma^*}{|y-x|^{n-1}}, \tag{8}$$

где Γ^* — видимая часть поверхности Γ относительно точки x, $d\Gamma^*$ — ее дифференциал.

Доказательство. Возьмем точку $x \in \Gamma$ и проведем из нее луч. Он пересечет поверхность Γ в некоторых точках, множество расстояний их до точки x ограничено снизу. Обозначим через z точку на луче, принадлежащую Γ и наименее удаленную от точки x. Совокупность всех таких точек образует поверхность Γ^*, которую назовем видимой частью поверхности Γ относительно точки x. Поверхность Γ^* может быть разрывной. Образуем непрерывную поверхность $\overline{\Gamma}^* = \Gamma^* \cup M$, где M — отрезки лучей, проведенных из точки x, которые являются линиями тока для рассмотренного нами ранее источника, помещенного в точке x. Так как верно соотношение:

$$\rho(x, \Gamma) = \rho(x, \overline{\Gamma}^*), \tag{9}$$

а к правой его части можем применить формулу (7), то в результате получим

$$\rho^{n-1}(x, \Gamma) = \int_{\overline{\Gamma}^*} \theta\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right) \frac{d\Gamma^*}{|y-x|^{n-1}}, \tag{10}$$

где $d\overline{\Gamma}^*$ — дифференциал поверхности $\overline{\Gamma}^*$, которая будет поверхностью с ограниченной вариацией, так как Γ — поверхность с ограниченной вариацией по условию, а интеграл опять понимается в смысле Стильтьеса и для рассматриваемого случая существует [4, теорема 1]. Так как множество M состоит лишь из линий тока, то поток Φ не проходит через M, т. е. весь поток Φ проходит через границу Γ^*, а потому формулу (10) можно переписать в виде

$$\rho^{n-1}(x, \Gamma) = \int \theta\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right) \frac{d\Gamma^*}{|y-x|^{n-1}}. \tag{11}$$

Лемма доказана.

Замечание 3.

$$\rho(x) = \rho(x, \Gamma) \in C_0^{\infty}(G). \tag{12}$$

Доказательство. Последнее утверждение равносильно тому, что под знаком интеграла, с помощью которого задается функция $\rho(x, \Gamma)$ по формуле (11) можно проводить операцию дифференцирования любое число раз. В книге [5, стр. 140] есть такая теорема.

Теорема. *Если последовательность $f_n(x)$ равномерно сходится к $f(x)$, функция $h(x)$ — функция с ограниченным изменением, то*

$$\lim_{n\to\infty} (s) \int_a^b f_n(x)\, dh(x) = (s) \int_a^b f(x)\, dh(x),$$

где интеграл понимается в смысле Стильтьеса (на что указывает буква (s)). На основании: 1) этой теоремы, 2) того факта, что $\theta(\zeta) \in C_0^{\infty}(E^n)$, 3) равномерного стремления к нулю выражения:

$$\frac{1}{h_j}\left[D^s\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{j-1}, x_j + h_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) - D^s\mu(x_1, \ldots, x_n)\right] - \frac{\partial D^s\mu}{\partial x_j} \quad (h_j \to 0), \tag{13}$$

где

$$\mu(x) = \theta\left(\frac{y-x}{|y-x|}\right)\frac{1}{|y-x|^{n-1}},$$

операцию дифференцирования под знаком интеграла Стильтьеса в нашем случае можно проводить любое число раз, т. е. $\rho^{n-1}(x) \in C_0^{\infty}(G)$, а отсюда следует в силу того, что $\rho(x) > 0$, что и $\rho(x) \in C_0^{\infty}(G)$.

Замечание 4. О. В. Бесов [6] дал формулу (не приводя доказательства) для функции из класса $C_0^{\infty}(G)$, заданной на ограниченной области $G \subset R_n$ с границей Γ, удовлетворяющей условию Липшица с $\alpha = 1$, величина которой имеет порядок расстояния от точки $x \in G$ до границы Γ области G. Здесь удалось улучшить этот результат, а именно построить функцию, граница области задания которой должна иметь лишь ограниченную вариацию, ибо класс функций с ограниченным изменением шире класса функций, удовлетворяющих условию Липшица [4].

Лемма 3. *Пусть задана ограниченная область $G \subset R_n$ с границей Γ, имеющей ограниченную вариацию. Тогда на области G существует функция $\eta(x)$, обладающая свойствами:*

$$1)\ \eta(x) \in C_0^{\infty}(G); \tag{14}$$

$$2)\ \eta(x) \geqslant 0; \tag{15}$$

$$3)\ \eta(x) \geqslant C_1 t^{\alpha}(x); \tag{16}$$

$$4)\ |D^s\eta(x)| \leqslant C_2 t^{\alpha-s}(x), \tag{17}$$

где $t = t(x)$ — расстояние от точки $x \in G$ до границы Γ области G; $\alpha \geqslant s \geqslant 1$ — действительное число; $s \geqslant 1$ — целое число; C_1, $C_2 > 0$ — константы, не зависящие от x; D^s— любая частная производная порядка s, взятая по совокупности переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Доказательство сразу следует из предыдущих рассуждений, если принять

$$\eta(x) = \rho^{\alpha}(x). \tag{18}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. С. Фохт, Некоторые теоремы вложения для решений уравнений эллиптического типа, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 105, 1969.
2. А. С. Фохт, Об одной лемме вариационного исчисления и ее приложении к теоремам вложения, ДАН СССР, т. 176, № 3, 1967.
3. А. С. Фохт, Некоторые неравенства для решений уравнений эллиптического типа и их производных вблизи границы области в матрике L_2, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 77, 1965.
4. И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
5. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 3, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
6. О. В. Бесов, Поведение дифференциальных функций на негладких поверхностях, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 117, 1972.

Поступила 24.IV 1972 г.

Московский физико-технический институт