УДК 517.55

О продолжении внутренних функций в полидиске

П. З. Агранович, Л. И. Ронкин

В этой работе приводим решение одной из задач, поставленных в монографии Рудина [1].

Следуя обозначениям, принятым в [1], положим

$$U^n = \{z : z \in \mathbf{C}^n;\ |z_i| < 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\},\ T^n = \{z : z \in \mathbf{C}^n;\ |z_i| = 1,\ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Далее, обозначим через B семейство функций* $f(z)$, голоморфных в U^n и таких, что

а) для почти всех $z \in T^n$ существует предел $f^*(z) = \lim\limits_{t \to 1} f(tz)$ такой, что $|f^*(z)| = 1$;

б) наименьшая n-гармоническая** мажоранта функции $\ln |f(z)|$ равна нулю.

Обозначим также $f_{'z}(\lambda) = f(z_1\lambda, z_2\lambda, \ldots, z_{n-1}\lambda, \lambda)$, где $\lambda \in \mathbf{C}^1$, а $'z = (z_1, \ldots, z_{n-1})$. Заметим, что при $n = 1$ классу B принадлежат произведения Бляшке и только они. В случае $n > 1$ Рудин [1] показал, что $f(z) \in B$ тогда и только тогда, когда функции $f_{'z}(\lambda)$ для почти всех $'z \in T^{n-1}$ являются, как функции переменного λ, произведениями Бляшке.

Известно, что произведение Бляшке голоморфно продолжается в некоторую окрестность каждой точки из T^1, не являющейся предельной для его корней. В [1] был поставлен вопрос о справедливости соответствующего утверждения для функций $f(z) \in B$ при $n > 1$. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f(z) \in B$ и пусть E — открытое множество в T^n, ни одна точка которого не является предельной для точек множества $\{z : f(z) = 0\}$. Тогда в $\mathbf{C}^n$ существует такое открытое множество Ω, что $E \subset \Omega$ и функция $f(z)$ голоморфно продолжается из U^n на $U^n \cup \Omega$.*

Доказательство этой теоремы, которое для упрощения записи проводим при $n = 2$, основано на следующей замечательной теореме С. Н. Бернштейна (см. [2, стр. 102]).

Теорема 2. *Пусть $f(x_1, x_2)$ — функция двух вещественных переменных x_1, x_2, заданная в прямоугольнике $\{(x_1, x_2) : |x_1| < h, |x_2| < k\}$. Пусть,*

* Функции, которые мы относим к классу B, в [1] назывались хорошими внутренними функциями (good inner function).

**Дважды непрерывно дифференцируемая вещественнозначная функция $u(z)$ называется n-гармонической, если

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

далее, при любом $x_1^0 \in [-h, h]$ функция $f(x_1^0, x_2)$ является сужением функции $f(x_1^0, z_2)$, голоморфной по z_2 внутри эллипса E_2 с фокусами в точках $-k$, k и полусуммой осей $\frac{k}{\rho_2}$ и ограниченной там константой M, а при всяком $x_2^0 \in [-k, k]$ функция $f(x_1, x_2^0)$ является сужением функции $f(z_1, x_2^0)$, голоморфной по z_1 внутри эллипса E_1 с фокусами в точках $-h$, h и полусуммой осей $\frac{h}{\rho_1}$ и ограниченной в нем той же константой M. Тогда функция $f(x_1, x_2)$ является сужением функции $f(z_1, z_2)$, голоморфной в области, являющейся объединением декартовых произведений областей $G_j^t \subset \subset \mathbf{C}^1(z_j)$ $(j=1,2;\ 0<t<1)$, ограниченных эллипсами E_j', софокусными с эллипсами E_j и имеющими полусумму осей $\frac{k}{R_j}$, где R_j $(j=1,2)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\ln tR_1}{\ln \rho_1} + \frac{\ln tR_2}{\ln \rho_2} = 1,$$

при этом $|f(z_1, z_2)| < \frac{4M}{(1-t)^2}$, $\forall z_j \in G_j^t$, $j = 1, 2$.

Отметим вытекающее из этой теоремы следствие.

Следствие. *Пусть функция $f(z_1, z_2)$, $z_j = x_j + iy_j$ $(j=1, 2)$, при любом фиксированном $z_1 \in \{z_1 : x_1 = 0, |y_1| < h\}$ голоморфна, как функция переменного z_2, в квадрате $\{|x_2| < h, |y_2| < h\}$ и ограничена там константой M, и пусть, далее, при любом фиксированном $z_2 \in \{z_2 : x_2 = 0, |y_2| < h\}$ голоморфна, как функция переменного z_1, в квадрате $\{|x_1| < h, |y_1| < h\}$ и ограничена в нем той же константой M. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, h)$ найдется такое $\eta(\varepsilon) > 0$, что функция $f(z_1, z_2)$ является сужением некоторой функции, голоморфной в области*

$$\{(z_1, z_2) : |z_1| < h - \varepsilon;\ |z_2| < \eta(\varepsilon)\}.$$

Докажем теперь следующие леммы.

Лемма. *Пусть $f(z_1, z_2)$ — функция, голоморфная в U^2, $v(\varepsilon) = \{z_1 \in \mathbf{C}^1, |z_1| = 1, |\arg z_1| < \varepsilon\}$, где $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Если все функции семейства $\{f_{z_1}(\lambda)\}_{z_1 \in v(\varepsilon)}$ голоморфно продолжаются из U^1 в одну и ту же окрестность ω точки $\lambda = 1$ и равномерно ограничены в ω, то функция $f(z_1, z_2)$, как функция переменных z_1 и z_2, голоморфно продолжается из U^2 на некоторую окрестность точки $(1, 1)$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{\Delta}(\varepsilon) = \{(z_1, z_2) : |\arg z_j| < \varepsilon,\ e^{-\varepsilon} < |z_j| < e^{\varepsilon},\ j = 1, 2\}$ и $\Delta(\varepsilon) = \widetilde{\Delta}(\varepsilon) \cap \bar{U}^2$. Рассмотрим отображение $\alpha : (z_1, z_2) \to (w_1, w_2)$, определяемое равенствами

$$w_1 = \ln z_1,\ (|\arg z_1| < \pi),\ w_2 = \ln z_2\ \ (|\arg z_2| < \pi).$$

Очевидно, что это отображение в $\widetilde{\Delta}(\varepsilon)$ биголоморфно.

Обозначим $F(w_1, w_2) = f(\alpha^{-1}(w_1, w_2))$. Ввиду биголоморфности отображения α функция $F(w_1, w_2)$ голоморфна в области

$$\alpha(\Delta(\varepsilon)) = \{(w_1, w_2) : -\varepsilon < \operatorname{Re} w_j < 0, |\operatorname{Im} w_j| < \varepsilon,\ j = 1, 2\}.$$

Рассмотрим теперь функцию $\varphi(\mu, w_1) = F(\mu + w_1, \mu)$. Эта функция, очевидно, голоморфна в области

$$\{(\mu, w_1): -\varepsilon < \mathrm{Re}\mu < 0, |\mathrm{Im}\mu| < \varepsilon; -\varepsilon - \mathrm{Re}\mu < \mathrm{Re}\, w_1 < -\mathrm{Re}\mu, \\ -\varepsilon - \mathrm{Im}\mu < \mathrm{Im}\, w_1 < \varepsilon - \mathrm{Im}\mu\}$$

и, значит, при фиксированном $\mu : \{\mu : \mathrm{Re}\,\mu = -\delta, |\mathrm{Im}\,\mu| < 2\delta\}$, $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4}$, голоморфна в квадрате $\{w_1 : |\mathrm{Re}\, w_1| < 2\delta, |\mathrm{Im}\, w_1| < 2\delta\}$. Так как по условию леммы функции $f_{z_1}(\lambda)$ при любом $z_1 \in v(\varepsilon)$ голоморфно продолжаются на ω, то для любого достаточно малого $\delta > 0$ функция $\varphi(\mu, w_1)$ при $w_1 \in \{w_1 : \mathrm{Re} w_1 = 0, |\mathrm{Im}\, w_1| < 2\delta\}$, как функция переменного μ, голоморфно продолжается на квадрат $\{\mu : -3\delta < \mathrm{Re}\,\mu < \delta, |\mathrm{Im}\,\mu| < 2\delta\}$.

Таким образом, функция $\varphi(\mu, w_1)$ удовлетворяет условиям следствия из теоремы С. Н. Бернштейна и для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое число $\eta(\varepsilon_1)$, что функция $\varphi(\mu, w_1)$ голоморфно продолжается в область $\{(\mu, w_1): |\mu + \delta| < 2\delta - \varepsilon_1, |w_1| < \eta(\varepsilon_1)\}$. Выбирая ε_1 достаточно малым, заключаем, что функция $\varphi(\mu, w_1)$ голоморфно продолжается в некоторую окрестность начала координат, а, значит, функция $f(z_1, z_2)$ голоморфно продолжается из U^2 на некоторую окрестность точки $(1, 1)$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $\{\varphi_\alpha(\lambda)\}$ — семейство произведений Бляшке, где α — произвольный параметр из некоторого множества A, и в некоторой точке $\lambda^0 \in U^1$ $\inf_{\alpha \in A} |\varphi_\alpha(\lambda^0)| > 0$. Пусть, далее, существует окрестность ω точки $\lambda = 1$ такая, что в области $\omega \cap \overline{U}^1$ не обращается в нуль ни одна из функций $\varphi_\alpha(\lambda)$. Тогда все функции $\varphi_\alpha(\lambda)$ голоморфно продолжаются из U^1 на некоторую не зависящую от α окрестность $\widetilde{\omega}$ точки $\lambda = 1$ и эти продолжения равномерно ограничены на каждом компакте $K \subset \widetilde{\omega}$.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что поскольку при конформном отображении U^1 на U^1 произведения Бляшке переходят в произведения Бляшке, то, не нарушая общности, можно считать $\lambda^0 = 0$.

Далее, замечая, что все функции $\varphi_\alpha(\lambda) \neq 0$ $\forall \lambda \in \omega \cap \overline{U}^1$, заключаем, что в каждой точке множества $\omega \cap T^1$ функции $\varphi_\alpha(\lambda)$ имеют предельные значения, равные по модулю 1. Отсюда, согласно принципу симметрии, следует, что все функции $\varphi_\alpha(\lambda)$ голоморфно продолжаются из U^1 на некоторое открытое множество ω', содержащее множество $\omega \cap T$, а, значит, и на некоторую ε-окрестность $\widetilde{\omega}$ точки $\lambda = 1$.

Покажем теперь равномерную ограниченность функций $\varphi_\alpha(\lambda)$ на каждом компакте $K \subset \widetilde{\omega}$.

Обозначим через $\lambda_1(\alpha), \lambda_2(\alpha), \ldots, \lambda_n(\alpha), \ldots, 0 < |\lambda_n(\alpha)| < 1$, корни функции $\varphi_\alpha(\lambda)$. Тогда

$$\varphi_\alpha(\lambda) = \prod_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\bar{\lambda}_n(\alpha)}{|\lambda_n(\alpha)|} \frac{\lambda_n(\alpha) - \lambda}{1 - \lambda_n(\alpha)\lambda} \right]$$

и

$$\prod_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(\alpha)| = |\varphi_\alpha(0)| \geqslant \inf_{\alpha \in A} |\varphi_\alpha(0)| > 0.$$

Отсюда, как нетрудно видеть, следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\lambda_n(\alpha)|) < -\ln \inf_{\alpha \in A} |\varphi_\alpha(0)|, \quad \forall \alpha \in A.$$

Оценим теперь отношение $\frac{\varphi_\alpha'(\lambda)}{\varphi_\alpha(\lambda)}$ при λ, принадлежащих какому-нибудь компакту $K \subset \widetilde{\omega}$, который отстоит от нулей и особенностей функции $\varphi_\alpha(\lambda)$ на расстоянии большем, чем некоторое $d > 0$. Имеем

$$\left|\frac{\varphi_\alpha'(\lambda)}{\varphi_\alpha(\lambda)}\right| = \sum \frac{||\lambda_n(\alpha)|^2 - 1|}{|1 - \lambda\bar{\lambda}_n(\alpha)||\lambda_n(\alpha) - \lambda|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\text{const}}{d^2} \sum (1 - |\lambda_n(\alpha)|) < -\frac{\text{const}}{d^2} \ln \inf_{\alpha \in A} |\varphi_\alpha(0)|, \quad \forall \alpha \in A.$$

Следовательно,

$$|\ln \varphi_\alpha(\lambda)| = \left|\int_1^\lambda [\ln \varphi_\alpha(t)]'\, dt + \ln \varphi_\alpha(1)\right| = \left|\int_1^\lambda [\ln \varphi_\alpha(t)]'\, dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\text{const}}{d^2} \ln \inf_{\alpha \in A} |\varphi_\alpha(0)|\, |1 - \lambda|$$

и, значит,

$$|\varphi_\alpha(\lambda)| \leqslant \exp\left\{-\frac{\text{const}}{d^2} \ln \inf_{\alpha \in A} |\varphi_\alpha(0)|\, \varepsilon\right\}, \quad \forall \lambda \in K, \quad \forall \alpha \in A.$$

Лемма доказана.

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1.

Пусть z^0 — произвольная точка множества E, не нарушая общности, можно считать, что $z^0 = (1, 1)$. Пусть, как и в лемме 1, $v(\varepsilon) = \{z_1 : |z_1| = 1, |\arg z_1| < \varepsilon\}$, причем $\varepsilon > 0$ выбрано столь малым, чтобы множество

$$\{(z_1, z_2) : |z_1| = |z_2| = 1, \quad |\arg z_1| < 2\varepsilon, \quad |\arg z_2| < 2\varepsilon\}$$

находилось на положительном расстоянии от множества точек $\{z : z \in U^2, f(z) = 0\}$. Возможность выбора такого числа ε очевидна.

Поскольку $f_{z_1}(\lambda) \not\equiv 0$ при $z_1 = 1$, то в некоторой точке $\lambda^0 \in U^1$ функция $f_{z_1}(\lambda^0) \neq 0$, и, значит, $f(\lambda^0, \lambda^0) \neq 0$. Поэтому в некоторой окрестности ω' точки (λ^0, λ^0) выполняется неравенство $\inf_{\omega'} |f(z_1, z_2)| > 0$.

Обозначим

$$v' = \{z_1 : (\lambda^0 z_1, \lambda^0) \in \omega', |z_1| = 1\} \quad \text{и} \quad v''(\varepsilon) = v' \cap v(\varepsilon).$$

Очевидно, что $v''(\varepsilon)$ — непустое открытое множество.

Обозначим теперь через $\widetilde{v}$ множество тех точек $z_1 \in v''(\varepsilon)$, для которых функция $f_{z_1}(\lambda)$ является произведением Бляшке. Как следует из определения множеств v' и $v(\varepsilon)$, каждая функция $f_{z_1}(\lambda)$ при $z_1 \in \widetilde{v}$ не имеет нулей в пересечении круга $|\lambda| < 1$ с ε- окрестностью точки $\lambda = 1$ и $\inf_{z_1 \in \widetilde{v}} |f_{z_1}(\lambda^0)| > 0$, $\lambda^0 \in U^1$.

Применяя лемму 2, заключаем, что все функции $f_{z_1}(\lambda)$, $z_1 \in \widetilde{v}$, голоморфно продолжаются на некоторую окрестность точки $\lambda = 1$ и в ней равномерно ограничены. Поскольку равномерно ограниченное семейство голоморфных функций является нормальным, то функции $f_{z_1}(\lambda)$ при любом $z_1 \in v''(\varepsilon)$ голоморфно продолжаются в ту же окрестность точки $\lambda = 1$ и эти продолжения равномерно ограничены. Используя лемму 1, заключаем тогда, что у каждой точки множества E существует окрестность, в которую функция $f(z_1, z_2)$ голоморфно продолжается из U^2. Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Rudin, Function Theory in Polydiscs, W. A. Benjamin, inc. New-York — Amsterdam, 1969.
2. С. Н. Бернштейн, О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени, Сообщ. Харьк. матем. об-ва, сер. 2, т. 13, 1912 (см. также С. Н. Бернштейн, собр. соч., т. 1, 1905—1930).

Поступила 29.VI 1971 г.
Физико-технический институт низких температур АН УССР