УДК 517.946

К разрешимости эллиптических задач в предельных областях

Л. А. Иванов

1. В работе [1] исследован вопрос о дифференцируемости по параметру решений эллиптических краевых задач при вариации области. Аналогичными методами можно исследовать и непрерывность решений по параметру. В [1] предполагалось, что при каждом значении параметра $t \in [0, 1]$ выполнены условия однозначной разрешимости, причем константы в соответствующих неравенствах коэрцитивности не зависят от t.

Целью данной работы является рассмотрение случая, когда при некоторых значениях параметра априори неизвестна однозначная разрешимость краевой задачи. Доказывается, что задача однозначно разрешима и при этих исключительных значениях параметра.

2. Пусть G — ограниченная область R^n. В G определен равномерно эллиптический оператор $L(x, D)$ порядка $2m$ с достаточно гладкими коэффициентами и система операторов $\{B_j(x, D)\}_{j=1}^{m}$ порядков m_j соответственно.

В G содержатся области G_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, причем G_t гладко зависит от параметра в смысле работы [1]. Естественно, что налагаются соответствующие условия гладкости и на границу ∂G_t. При каждом $t \in [0, 1]$ рассматриваем краевую задачу:

$$L(x, D)\, u(x) = f(x), \quad x \in G_t, \tag{1}$$

$$B_j(x, D)\, u(x) = g_j(x), \quad x \in \partial G_t, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Нас будут интересовать гладкие решения этой задачи в пространствах Соболева $H^{2m+s}(G_t)$, $s > 0$ (обозначения соответствуют обозначениям в книге [2]). В предположении однозначной нормальной разрешимости задачи (1), (2) при $t \neq t_0 \in [0, 1]$ имеют место неравенства [3]:

$$\|u\|_{H^{2m+s}(G_t)} \leqslant C\{\|Lu\|_{H^s(G_t)} + \Sigma \|B_j u\|_{H^{2m+s-m_j-\frac{1}{2}}(\partial G_t)}\},$$

$$2m + s - m_j > 0, \quad s > 0. \tag{3}$$

Итак, если $f \in H^s(G)$ и $g_j \in H^{2m+s-m_j}(G)$, то при каждом $t \neq t_0$ имеем однозначно определенное решение $u(t, x)$ задачи (1), (2) в G_t, $s > 0$, $2m + s - m_j - \frac{1}{2} > 0$. Через $u_t(t, x) = R_t u(t, x)$ обозначим продолжение $u(t, x)$ с G_t на G. Операторы продолжения $R_t \in L(H^{2m+s}(G_t),\ H^{2m+s}(G))$ при каждом t ограничены [4]. Как показано в другой работе, в указанных предположениях эти операторы можно выбрать равномерно ограниченными по t и такими, что

$$\| R(t) S(t) u - R(\tau) S(\tau) u \|_{H^{2m+s-\gamma}(G)} \leqslant C |t - \tau|^{\gamma} \| u \|_{H^{2m+s}(G)}; \qquad (4)$$

здесь и в дальнейшем $S(t)\,(S(\tau))$ — оператор сужения на G_t (соответственно на G_τ). Теперь в области G можем сравнить $u_t(t, x)$ и $u_\tau(\tau, x)$. Для оценки норм разности этих функций понадобятся некоторые вспомогательные результаты.

3. Пусть G_τ достаточно близка к G_t, тогда по нашим предположениям (см. [1]) в локальных координатах (s, n) на ∂G_t поверхность ∂G_τ записывается функцией $n = \varkappa(s; t, \tau)$, $|\varkappa| \leqslant C|t - \tau|$. Если обозначить $G_t | G_\tau$ через δG, $|t - \tau| = \delta$, то справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для любой функции* $\varphi \in C^\infty(\overline{G}_t)$ *имеет место оценка:*

$$\| \varphi \|_{H^{s-\gamma}(\delta G)} \leqslant C\delta^{\gamma} \| \varphi \|_{H^s(G_t)}, \quad s - \gamma \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \gamma < \frac{1}{2}. \qquad (5)$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(G_t)$. Тогда по неравенству Гельдера

$$\| \varphi \|^2_{L_2(\delta G)} = \int_{\partial G_t} \int_0^{\varkappa} |\varphi(s, n)|^2\, dn ds = \int_{\partial G_t} \int_0^{\varkappa} |\varphi(s, n) - \varphi(s, 0)|^2\, dn ds =$$

$$= \int_{\partial G_t} \int_0^{\varkappa} \left| \int_0^n D_2\varphi(s, \tau)\, d\tau \right|^2 dn ds \leqslant C\delta \int_{\partial G_t} \int_0^{\varkappa} \int_0^n |D_2\varphi|^2\, d\tau dn ds \leqslant$$

$$\leqslant C\delta^2 \int_{\partial G_t} \int_0^{\varkappa} |D_2\varphi|^2\, d\tau ds \leqslant C\delta^2 \| \varphi \|^2_{H^1(\delta G)} \leqslant C\delta^2 \| \varphi \|^2_{H^1(G_t)}.$$

Собирая начало и конец, получаем

$$\| \varphi \|_{L_2(\delta G)} \leqslant C\delta \| \varphi \|_{H^1(G_t)}, \quad \varphi \in C_0^\infty(G_t). \qquad (6)$$

Воспользовавшись интерполяционной теоремой (см. [2]) для шкалы пространств $H_0^s(G_t)$ (замыкание $C_0^\infty(G_t)$ по норме $H^s(G_t)$) из (6) и очевидного неравенства $\| \varphi \|_{L_2(\delta G)} \leqslant \| \varphi \|_{L_2(G_t)}$, $\varphi \in C_0^\infty(G_t)$, получаем $\| \varphi \|_{L_2(\delta G)} \leqslant C\delta^{\gamma} \| \varphi \|_{H_0^{\gamma}(G_t)}$, $0 \leqslant \gamma < \frac{1}{2}$. Кроме того, если $0 \leqslant \gamma < \frac{1}{2}$, то $H_0^{\gamma}(G_t) = H^{\gamma}(G_t)$ и $\| \varphi \|_{L_2(\delta G)} \leqslant C\delta^{\gamma} \| \varphi \|_{H^{\gamma}(G_t)}$, $0 \leqslant \gamma < \frac{1}{2}$ для любой функции $\varphi \in C^\infty(\overline{G}_t)$. Следовательно,

$$\| D^\alpha \varphi \|_{L_2(\delta G)} \leqslant C\delta^{\gamma} \| D^\alpha \varphi \|_{H^{\gamma}(G_t)} \leqslant C\delta^{\gamma} \| \varphi \|_{H^{|\alpha|+\gamma}(G_t)},$$

отсюда $\| \varphi \|_{H^s(\delta G)} \leqslant C\delta^{\gamma} \| \varphi \|_{H^{s+\gamma}(G_t)}$, $s \geqslant 0$, $0 \leqslant \gamma < \frac{1}{2}$, s — целое. Воспользовавшись

зовавшись еще раз интерполяционной теоремой, на этот раз для шкалы H^s [2] получаем утверждение леммы.

Введем оператор A_δ, действующий на функциях из $C^\infty(\bar{G}_t)$ по формуле $(A_\delta\varphi)(s, n) = \varphi(s; \varkappa(s; t, \tau)) - \varphi(s; 0)$.

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$\| A_\delta \varphi \|_{H^{s-\gamma(1+\varepsilon)}(\partial G_t)} \leqslant C\delta^\gamma \| \varphi \|_{H^{s+\frac{1}{2}}(G_t)}, \tag{7}$$

где $s - \gamma(1+\varepsilon) > 0$, $0 \leqslant \gamma < \frac{1}{2}$, ε — *произвольно малое.*

Доказательство дано в [1].

4. Приступаем к рассмотрению непрерывности.

Теорема 1. *Пусть при всех* $t = t_0$ $t \in [0, 1]$ *выполнены условия однозначной разрешимости* (3) *с равномерно ограниченной константой и пусть* $f \in H^s(G), g_j \in H^{2m+s-m_j}(G)$, $s > 0$, $2m+s-m_j > 0$. *Тогда* $u_t(t, x)$ *удовлетворяет условию Гельдера с показателем* γ *на* $(t_0, 1]$ *как функция со значениями в* $H^{2m+s-\gamma(1+\varepsilon)}(G)$, $2m+s-\gamma(1+\varepsilon) \geqslant 0$, $0 \leqslant \gamma < \frac{1}{2}$, ε — *произвольно малое.*

Доказательство. Оцениваем для $t', t'' \in (t_0, 1]$:

$$\| u_{t'}(t', x) - u_{t''}(t'', x) \|_{H^{2m+s-\gamma(1+\varepsilon)}(G)} \leqslant \| u_{t'}(t', x) -$$
$$- R(t'') S(t'') u_{t'}(t', x) \|_{H^{2m+s-\gamma(1+\varepsilon)}(G)} +$$
$$+ \| R(t'') S(t'') u_{t'}(t', x) - u_{t''}(t'', x) \|_{H^{2m+s-\gamma(1+\varepsilon)}(G)}.$$

Используя для первого слагаемого (4), а для второго равномерную ограниченность операторов продолжения, имеем

$$\| u_{t'} - u_{t''} \|_{H^{2m+s-\gamma(1+\varepsilon)}(G)} \leqslant C |t' - t''|^{\gamma(1+\varepsilon)} \| u_{t'} \|_{H^{2m+s}(G)} +$$
$$+ C \| S(t'') u_{t'}(t', x) - u_{t''}(t'', x) \|_{H^{2m+s-\gamma(1+\varepsilon)}(G_{t''})}. \tag{8}$$

Из неравенства коэрцитивности (3) для второго слагаемого

$$\| S(t'') u_{t'} - u_{t''} \|_{H^{2m+s-\gamma(1+\varepsilon)}(G_{t''})} \leqslant C \{ \| L[S(t'') u_{t'} - u_{t''}] \|_{H^{s-\gamma(1+\varepsilon)}(G_{t''})} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} \| B_j S(t'') u_{t'} - g_j |_{\partial G_{t''}} \|_{H^{2m+s-\gamma(1+\varepsilon)}(\partial G_{t''})} \} \leqslant$$
$$\leqslant C \Big\{ \| L[S(t'') u_{t'} - u_{t''}] \|_{H^{s-\gamma(1+\varepsilon)}(\delta G_{t''})} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} (\| A_\delta B_j S(t'') u_{t'} \|_{H^{2m+s-m_j-\gamma(1+\varepsilon)-\frac{1}{2}}(\partial G_{t''})} + \| A_\delta g_j \|_{H^{2m+s-m_j-\gamma(1+\varepsilon)-\frac{1}{2}}(\partial G_{t''})}) \Big\};$$

здесь $\delta G_{t''} = G_{t''} \setminus G_{t'}$, $\delta = |t'' - t'|$. Из леммы 1 и 2 следует, что

$$\| S(t'') u_{t'} - u_{t''} \|_{H^{2m+s-\gamma(1+\varepsilon)}(G_{t''})} \leqslant C\delta^\gamma \Big\{ \| L[S(t'') u_{t'} - u_{t''}] \|_{H^s(G_{t''})} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{m} (\| B_j S(t'') u_{t'} \|_{H^{2m+s+m_j-\frac{1}{2}}(\partial G_{t''})} + \| g_j \|_{H^{2m+s-m_j}(G)}) \Big\}.$$

Еще раз пользуясь равномерной ограниченностью всех участвующих операторов, получаем:

$$\| S(t'') u_{t'} - u_{t''} \|_{H^{2m+s-\gamma(1+\varepsilon)}(G_{t''})} \leqslant$$

$$\leqslant C\delta^{\gamma} \left\{ \sup_{t \in [0,1]} \| u_t \|_{H^{s+2m}(G)} + \sum_{j=1}^{m} \| g_j \|_{H^{2m+s-m_j}(G)} \right\}.$$

Подставляя эту оценку в (8) и используя (3), приходим к неравенству

$$\| u_{t'} - u_{t''} \|_{H^{2m+s-\gamma(1+\varepsilon)}(G)} \leqslant$$

$$\leqslant C |t' - t''|^{\gamma} \left\{ \| f \|_{H^{s}(G)} + \sum_{j=1}^{m} \| g_j \|_{H^{2m+s-m_j}(G)} \right\}. \tag{9}$$

Теорема доказана.

Непосредственно из (9) следует, что $u_t(t, x)$ равномерно непрерывна на $[t_0, 1]$ как функция со значениями в $H^{2m+s-\gamma(1+\varepsilon)}(G)$. Поэтому ее можно продолжить на отрезок $[t_0, 1]$. Обозначим через $u(t_0, x)$ сужение на G_{t_0} этой продолженной функции в точке t_0.

Теорема 2. *Функция $u(t_0, x)$ является решением задачи (1), (2) при $t = t_0$, а задача (1), (2) однозначно разрешима при этом значении t.*

Доказательство.

$$\| Lu(t_0, x) - f|_{G_{t_0}} \|_{H^{l-\gamma(1+\varepsilon)}(G_{t_0})} \leqslant \| Lu(t_0, x) - Lu_t(t, x) \|_{H^{l-\gamma(1+\varepsilon)}(G_{t_0})} +$$

$$+ \| Lu_t(t, x) - f \|_{H^{l-\gamma(1+\varepsilon)}(G_{t_0} \setminus G_t)} \leqslant C \{ \| u(t_0, x) - u_t(t, x) \|_{H^{2m+l-\gamma(1+\varepsilon)}(G)} +$$

$$+ |t - t_0|^{\gamma} \| Lu_t - f \|_{H^{l}(G)} \} \leqslant C |t - t_0|^{\gamma} \left\{ \| f \|_{H^{l}(G)} + \sum_{j=1}^{m} \| g_j \|_{H^{2m+l-m_j}(G)} \right\}.$$

Отсюда при $t \to t_0$ следует, что $u(t_0, x)$ удовлетворяет уравнению (1). Аналогично показывается, что $u(t_0, x)$ удовлетворяет и граничным условиям.

Пусть теперь $f, g_j \in C^{\infty}(\overline{G})$. Используем для $u_t(t, x)$ в G_{t_0} оценку

$$\| u_t(t, x) \|_{H^{2m+l}(G_{t_0})} \leqslant C |t - t_0|^{\gamma} \| u_t(t, x) \|_{H^{2m+l+\gamma(1+\varepsilon)}(G)} +$$

$$+ \| u_t(t, x) \|_{H^{2m+l}(G_t)} \leqslant C \left\{ |t - t_0|^{\gamma} \| u_t(t, x) \|_{H^{2m+l+\gamma(1+\varepsilon)}(G)} + \right.$$

$$\left. + \| f \|_{H^{l}(G_t)} + \sum_{j=1}^{m} \| g_j \|_{H^{2m+l-m_j-\frac{1}{2}}(\partial G_t)} \right\}.$$

Так как $u_t(t, x)$ по теореме 1 равномерно непрерывна в $H^{2m+l+\gamma(1+\varepsilon)}(G)$, то можно перейти к пределу при $t \to t_0$. Мы получим (3) при $t = t_0$. Теорема доказана.

Следствие. *В условиях теоремы* 1 $u_t(t, x)$ *продолжается непрерывным образом на весь отрезок* $[0, 1]$. *В самом деле, совпадение значений $u(t_0, x)$ при приближении к t_0 справа и слева вытекает из теоремы* 2 *об однозначной разрешимости.*

5. Заключительные замечания. Совершенно ясно обобщение на случай других множеств точек, в которых не выполняется (3). Например, для справедливости теоремы 2 достаточно существование последовательности $t_n \to t_0$, для которой выполнено условие однозначной разрешимости (3). Обобщение полученных результатов на случай пространств H_p^s связано с установлением некоторых интерполяционных свойств последних.

Аналогичная методика применима с использованием результатов работы [1] в пространствах $C_{m,\alpha}$.

Некоторая потеря гладкости (т. е. наличие ε) возможно связана с методом доказательства.

Автор благодарен С. Г. Крейну, под руководством которого выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

1. С. Г. Крейн, Поведение решений эллиптических задач при вариации области, Studia Mathematica, **31**, 1968, 411—428.
2. Ж.-Л. Лионс, Э. Мадженес, Неоднородные граничные задачи и их приложения, «Мир», М., 1971.
3. С. Агмон, А. Дуглис, Л. Ниренберг, Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях, т. 1, ИЛ, М., 1962.
4. В. М. Бабич, К вопросу о распространении функций, УМН, т. 8, вып. 2, 1953.

Поступила 8.I 1972 г.
Воронежский государственный университет