УДК 517.51

О наилучшем приближении в нормированных модулях

А. Н. Кочубей

Пусть A — рефлексивная банахова алгебра, X — левый A-модуль. Модуль X называется нормированным, если X одновременно является нормированным пространством над полем комплексных чисел, причем для любых $x \in X$, $a \in A$ $\| ax \| \leqslant | a | \, \| x \|$, где $\|\cdot\|$ и $|\cdot|$ — нормы в X и A соответственно.

В последние годы топологические и, в частности, нормированные модули над банаховыми алгебрами нашли применение в ряде разделов функционального анализа ([1—4] и др.)

В данной работе рассматривается задача наилучшего приближения в нормированном модуле X. Зафиксируем A-линейно независимую систему элементов $x_0, \ldots, x_n \in X$. Требуется найти такие $a_0^*, \ldots, a_n^* \in A$, что имеет место равенство:

$$\inf_{a_0, \ldots, a_n \in A} \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k x_k - x \right\| = \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k^* x_k - x \right\|. \tag{1}$$

Очевидно, задача (1) — частный случай бесконечномерной задачи наилучшего приближения в нормированном пространстве X (см. [5]). Для задачи (1) удается, однако, получить более содержательные результаты по основным проблемам теории приближений (кроме проблемы единственности), чем в общем случае бесконечномерного приближения.

Теорема 1 («существование»). *Для того, чтобы для каждого $x \in X$ существовал «полином» наилучшего приближения $P_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* x_k$, $a_k^* \in A$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $a_0, \ldots, a_n \in A$*

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k x_k \right\| \geqslant \mu \sqrt{\sum_{k=0}^{n} | a_k |^2}, \ \mu > 0. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $X_1 = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n+1}$, $X_2 = X$. Очевидно, пространство X_1 рефлексивно. Определим отображение $T: X_1 \to X_2$ формулой

$$T\bar{a} = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k, \ \bar{a} = (a_0, \ldots, a_n) \in X_1.$$

Таким образом, задача оказывается эквивалентной операторной задаче наилучшего приближения: $P_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* x_k$ является «полиномом» наилучшего приближения элемента $x \in X$ тогда и только тогда, когда

$$\| T\bar{a}^* - x \|_{X_2} = \inf_{\bar{a} \in X_1} \| T\bar{a} - x \|_{X_2}, \ \ \bar{a}^* = (a_0^*, \ldots, a_n^*). \tag{3}$$

Из результатов С. Б. Стечкина [6] следует, что необходимое и достаточное условие существования для каждого $x \in X_2$ вектора $\bar{a}^* \in X_1$, удовлетворяющего (3), имеет вид:

$$\| T\bar{a} \|_{X_2} \geqslant \mu \| \bar{a} \|_{X_1} \ \text{для всех} \ \bar{a} \in X_1,$$

а это эквивалентно (2). Теорема доказана.

Если алгебра A является гильбертовым пространством, можно не требовать A-линейной независимости элементов $x_0, \ldots, x_n$. Обозначим в этом случае $S = X_1 \ominus \operatorname{Ker} T$. Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1 и пользуясь результатами С. И. Зуховицкого [7], видим, что условие (2) заменяется условием

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k x_k \right\| \geqslant \mu \sqrt{\sum_{k=0}^{n} | a_k |^2}, \ \mu > 0, \ (a_0, \ldots, a_n) \in S. \tag{2'}$$

Для модуля $X = C(Q, A)$, состоящего из всех непрерывных на компакте Q функций со значениями в A, этот результат получен С. И. Зуховицким и Г. И. Эскиным [8].

Определение. Система элементов $x_0, \ldots, x_n \in X$ называется чебышевской, если для любого $x \in X$ существует единственный «полином» наилучшего приближения вида $P_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* x_k$.

Для модуля $X = C(Q, A)$, где A — коммутативное гильбертово (в смысле Амброуза) кольцо [9], условие единственности наилучшего приближения найдено в [8] (это условие аналогично классической теореме Хаара). Заметим еще, что при условии равномерной выпуклости алгебры A по теореме Дэя [10] будет равномерно выпуклым модуль $X = L_p(A)$, $p > 1$, т. е. в этом модуле любая система элементов, удовлетворяющая (2), является чебышевской.

Будем называть систему элементов $x_0, \ldots, x_n \in X$ E-системой, если для нее выполнено условие (2) (или (2′), когда A — гильбертово пространство).

Теорема 2 («непрерывность метрической проекции»). *Пусть $x_0, \ldots, x_n \in X$ — E-система; $\{x^{(m)}\}_1^\infty$ — произвольная последовательность элементов модуля X, $P_n^*(x^{(m)}) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(m)} x_k$ — один из «полиномов» наилучшего приближения элемента $x^{(m)}$ ($m = 1, 2, \ldots$). Если $x^{(m)} \xrightarrow[m\to\infty]{} x \in X$, то* *последовательность* $\{P_n^*(x^{(m)})\}_{m=1}^{\infty}$ *содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к «полиному»* $P_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* x_k$ *наилучшего приближения элемента* x. *Если система* $x_0, \ldots, x_n$ *чебышевская, то* $P_n^*(x^{(m)}) \underset{m\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\rightarrow}} P_n^*(x)$.

Лемма. *Если* $\{a^{(m)}\}_{m=1}^{\infty} \subset A$, $a^0 \in A$, $x \in X$, $a^{(m)} \underset{m\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\rightarrow}} a^0$ *в* A, *то* $a^{(m)}x \underset{m\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\rightarrow}} a^0 x$.

Доказательство. Пусть $f \in X^*$ — произвольный линейный функционал над X. Положим $\varphi(a) = f(ax)$, $a \in A$. $|\varphi(a)|_{\mathbf{C}} = |f(ax)|_{\mathbf{C}} \leqslant \|f\|\,\|ax\| \leqslant \|f\|\,\|x\|\,|a|$ ($\mathbf{C}$ — поле комплексных чисел), т. е. $\varphi \in A^*$. Отсюда $f(a^{(m)}x - ax) = \varphi(a^{(m)} - a) \to 0$ при $m \to \infty$, и лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Поскольку $x^{(m)} \to x$, то $\|x^{(m)}\| \leqslant M < \infty$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

$$\|P_n^*(x^{(m)})\| \leqslant \|x^{(m)} - P_n^*(x^{(m)})\| + \|x^{(m)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|x^{(m)} - 0\| + \|x^{(m)}\| \leqslant 2M.$$

Так как $x_0, \ldots, x_n$ — E-система, то

$$\sqrt{\sum_{k=0}^{n} |a_k^{(m)}|^2} \leqslant \frac{1}{\mu} \|P_n^*(x^{(m)})\| \leqslant \frac{2M}{\mu},$$

откуда $|a_k^{(m)}| \leqslant \frac{2M}{\mu}$, $k = 0, 1, \ldots, n$; $m = 1, 2, \ldots$. Применяя теорему Эберлейна—Шмульяна и диагональный процесс, найдем такую последовательность чисел $\{m_j\}_{j=1}^{\infty}$, что $a_k^{(m_j)} \underset{j\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\rightarrow}} a_k^* \in A$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Пусть $P_n^*(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k^* x_k$. Согласно лемме, $P_n^*(x^{(m_j)}) \underset{j\to\infty}{\overset{\text{сл.}}{\rightarrow}} P_n^*(x)$.

Пусть $P_n = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k$, где $a_k \in A$ произвольны. Тогда $\|x^{(m_j)} - P_n^*(x^{(m_j)})\| \leqslant \|x^{(m_j)} - P_n\|$, откуда (см., например, [11, стр. 254]) $\|x - P_n^*(x)\| \leqslant \varliminf_{j\to\infty} \|x^{(m_j)} - P_n^*(x^{(m_j)})\| \leqslant \lim_{j\to\infty} \|x^{(m_j)} - P_n\| = \|x - P_n\|$, т. е. $P_n^*(x)$ — «полином» наилучшего приближения элемента x.

Если система $x_0, \ldots, x_n$ — чебышевская, то $P_n^*(x^{(m)}) \overset{\text{сл.}}{\rightarrow} P_n^*(x)$ (в противном случае, выделив другую подпоследовательность последовательности $\{\bar{a}^{(m)}\} = \{(a_0^{(m)}, \ldots, a_n^{(m)})\}$, мы пришли бы еще к одному «полиному» наилучшего приближения для x). Теорема доказана.

Теорема 3 («B-свойство»). *Пусть* $x_0, \ldots, x_n, \ldots \in X$ *— такая последовательность элементов модуля* X, *что при каждом* n $x_0, \ldots, x_n$ *—* E*-система. Каковы бы ни были числа*

$$e_0 \geqslant e_1 \geqslant \ldots \geqslant e_n \geqslant \ldots \geqslant e_N \geqslant 0$$

($N > n$ — произвольное натуральное число), существует элемент $x \in X$ такой, что

$$E_n(x) = \inf_{a_0, \ldots, a_n \in A} \left\| x - \sum_{k=0}^{n} a_k x_k \right\| = \begin{cases} e_n, & n = 0, 1, \ldots, N, \\ 0, & n = N+1, N+2, \ldots \end{cases}$$

Доказательство проводится так же, как в скалярном случае (см. [12]), с учетом общих свойств функционала $E_n(x)$ [5, стр. 137—139] и того факта, что условие (2) или (2') обеспечивает замкнутость в X подмодуля, порожденного элементами $x_0, \ldots, x_n$ при каждом фиксированном n.

Как показал В. Н. Никольский [13], для общей бесконечномерной задачи наилучшего приближения утверждение типа теоремы 3 справедливо лишь в том случае, когда пространство X рефлексивно.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. E. Harte, A generalisation of the Hahn-Banach theorem, J. London. Math. Soc,. **40**, 1965, 283—287.
2. J. G. de Lamadrid, Topological modules; Banach algebras, tensor products, algebras of kernels, Trans. Amer. Math. Soc., **126**, № 3, 1967, 361—419.
3. H. Halpern, Module homomorphisms of a Von Neumann algebra, Trans. Amer. Math. Soc., **140**, 1969, 183—193.
4. P. P. Saworotnow, Representation of a topological group on a Hilbert module, Duke Math. J., **37**, № 1, 1970, 145—150.
5. I. Singer, Cea mai buna approximare in spatii vectoriale normate prin elemente din subspatii vectoriale, Bucurest, 1967.
6. С. Б. Стечкин, О приближении абстрактных функций. Rev. math. pures et appl. (RPR), **1**, N 3, 1956, 79—83.
7. С. И. Зуховицкий, Некоторые теоремы теории чебышевских приближений в пространстве Гильберта, Матем. сб., т. 37, № 1, 1955.
8. С. И. Зуховицкий, Г. И. Эскин, Задача чебышевского приближения в коммутативном гильбертовом кольце, ДАН СССР, т. 119, № 6, 1958.
9. М. А. Наймарк, Нормированные кольца, «Наука», М., 1968.
10. M. M. Day, Some more uniformly convex spaces, Bull. Amer. Math. Soc., **47**, 1941, 504—517.
11. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
12. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.
13. В. Н. Никольский, О некоторых свойствах рефлексивных пространств, Ученые записки Калининского пединститута, вып. 29, 1963.

Поступила 23.IV 1971 г.

Киевский государственный университет