УДК 517.522.5

О построении равномерно сходящейся последовательности алгебраических полиномов по обобщенному методу наименьших квадратов для одного класса непрерывных функций

В. Ю. Кудринский, В. С. Остапчук

Предположим, что непрерывная на $[a, b]$ функция $f(x)$ такая, что

$$\int_a^b [f'(x)]^2 \, dx < \infty. \tag{1}$$

Последовательность алгебраических полиномов $P_n(x)$, построенных по обычному методу наименьших квадратов, сходится, вообще говоря, к этой функции в среднем, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b [f(x)-P_n(x)]^2\,dx=0.$$

В данной заметке указывается метод построения равномерно сходящейся к этой функции последовательности алгебраических полиномов, который в некотором смысле является аналогом метода наименьших квадратов.

Рассмотрим функционал

$$I^\alpha(f(x), y(x))=\int_a^b [f(x)-y(x)]^2\,dx+\alpha\int_a^b [y(x)]^2\,dx+\alpha\int_a^b [y'(x)]^2\,dx, \qquad (2)$$

где $\alpha>0$ — некоторый параметр (см. [1]), и будем искать элемент $y^\alpha(x)$, реализующий минимум этого функционала.

Теорема 1. *При $\alpha>0$ существует единственный элемент $y^\alpha(x)$, реализующий минимум функционала* (2), *который является решением краевой задачи*

$$\alpha y''(x)-(1+\alpha)\,y(x)=-f(x), \qquad (3)$$

$$y'(a)=y'(b)=0. \qquad (4)$$

Доказательство. Обозначим через $D(A^\alpha)$ множество функций из области определения оператора $A^\alpha=\left[-\alpha\dfrac{d^2}{dt^2}+(1+\alpha)E\right]$, где E — единичный оператор, удовлетворяющий краевому условию (4). Непосредственной проверкой легко убедиться, что оператор A^α на $D(A^\alpha)$ является самосопряженным. Поэтому краевая задача (3), (4) разрешима (см. [2]). А так как оператор A^α на $D(A^\alpha)$ является положительно определенным, то и решение $y^\alpha(x)$ является единственным.

В силу (3) и (4)

$$\int_a^b [-f(x)+y^\alpha(x)]\,h(x)\,dx+\alpha\int_a^b y^\alpha(x)\,h(x)\,dx+\alpha\int_a^b [y^\alpha(x)]'\,h'(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b [-f(x)+(1+\alpha)\,y^\alpha(x)]\,h(x)\,dx+\alpha\int_a^b [y^\alpha(x)]'\,h'(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b [-f(x)+(1+\alpha)\,y^\alpha(x)]\,h(x)\,dx+\alpha\,[y^\alpha(x)]'\,h(x)\Big|_b^a-\alpha\int_a^b y''(x)\,h(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b [-f(x)+(1+\alpha)\,y(x)-\alpha y''(x)]\,h(x)\,dx=0$$

для всех $h(x)$ из области определения оператора A^α. Заметив, что

$$I^\alpha(f(x),\ y(x)+h(x))=I^\alpha(f(x),\ y(x))+(1+\alpha)\int_a^b h^2(x)\,dx+$$

$$+\alpha\int_a^b [h'(x)]^2\,dx-2\int_a^b [f(x)-y(x)]\,h(x)\,dx+$$

$$+2\alpha\int_a^b h(x)\,y(x)\,dx+2\alpha\int_a^b y'(x)\,h'(x)\,dx,$$

легко получаем

$$I^\alpha(y^\alpha(x)+h(x)) = I^\alpha(y^\alpha(x)) + (1+\alpha)\int_a^b h^2(x)\,dx + \alpha\int_a^b [h'(x)]^2\,dx. \qquad (5)$$

Значит, $I^\alpha(y^\alpha(x)) = \inf I^\alpha(y)$. Если допустить, что имеется еще один элемент $y^\alpha(x)+h(x)$, для которого $I^\alpha(y^\alpha(x)+h(x)) = I^\alpha(y^\alpha(x))$, то в силу (5) получим $(1+\alpha)\int_a^b h^2(x)\,dx = 0$, откуда $h(x)=0$. Теорема доказана.

Теорема 2. *При $\alpha\to 0$ последовательность $y^\alpha(x)$ равномерно стремится к $f(x)$.*

Доказательство. В силу очевидного неравенства

$$I^\alpha(y^\alpha(x)) \leqslant I^\alpha(f(x))$$

получаем

$$\int_a^b [f(x)-y^\alpha(x)]^2\,dx + \alpha\int_a^b [y^\alpha(x)]^2\,dx + \alpha\int_a^b \{[y^\alpha(x)]'\}^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \alpha\int_a^b f^2(x)\,dx + \alpha\int_a^b [f'(x)]^2\,dx,$$

откуда

$$\int_a^b [y^\alpha(x)]^2\,dx + \int_a^b [y^\alpha(x)]'\,dx \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b f'(x)\,dx \qquad (6)$$

и

$$\int_a^b [f(x)-y^\alpha(x)]^2\,dx \to 0, \quad \alpha\to 0. \qquad (7)$$

Таким образом, доказано, что последовательность $y^\alpha(x)$ при $\alpha\to 0$ сходится в среднем к $f(x)$.

Так как условие (6) определяет в пространстве непрерывных функций компактное множество, то из последовательности $y^\alpha(x)$ можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность, которая в силу (7) будет сходиться к $f(x)$, что и требовалось доказать.

Минимизирующую последовательность для функционала $I^\alpha(f(x))$ будем искать в виде

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \beta_k x^k \qquad (8)$$

из условия минимума

$$\Delta_n(B_n) \equiv I^\alpha(P_n(x)) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n \beta_k x^k\right]^2 dx + \alpha\int_a^b \left(\sum_{k=0}^n \beta_k x^k\right)^2 dx +$$

$$+ \alpha\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n k\beta_k x^{k-1}\right)^2 dx, \quad B_n = B_n(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n). \qquad (9)$$

Теорема 3. *Существует единственная конечная точка $B_n^0(\beta_0^0, \beta_1^0, \ldots, \beta_n^0)$, для которой $\Delta_n(B_n^0) = \inf\limits_{B_n} \Delta_n(B_n)$.*

Доказательство. Функция $\Delta_n(B_n)$ непрерывна от $B_n(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$, причем в силу

$$\Delta_n(B_n) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=0}^n \beta_k x^k\right]^2 dx +$$

$$+\alpha\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{n}\beta_k x^k\right)^2 dx+\alpha\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{n}k\beta_k x^{k-1}\right)^2 dx\geqslant$$

$$\geqslant\alpha\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{n}\beta_k x^k\right)^2 dx\geqslant\alpha\sum_{k=0}^{n}\beta_k^2\inf_{\sum\limits_{k=1}^{n}\beta_k^2=1}\int_a^b\left(\sum_{k=0}^{n}\beta_k x^k\right)^2 dx$$

$\Delta_n(B_n)\to\infty$, когда $B_n\to\infty$. Отсюда по известной теореме для непрерывных функций ее нижняя грань достигается в некоторой точке $B_n^0(\beta_0^0, \beta_1^0, \ldots, \beta_n^0)$.

Докажем единственность. Для этого введем в область определения функционала (2) скалярное произведение

$$(f_1(x), f_2(x))=\int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx+\alpha\int_a^b f_1(x)f_2(x)\,dx+\alpha\int_a^b f_1'(x)f_2'(x)\,dx. \tag{10}$$

Продифференцировав (9) по β_s $(s=0,1,2,\ldots,n)$ и приравняв каждую из производных нулю, получим систему нормальных уравнений

$$\frac{\partial I^\alpha(P_n(x))}{\partial\beta_s}=-2\int_a^b f(x)x^s dx+2(1+2\alpha)\sum_{k=0}^{n}\beta_k\int_a^b x^s x^k dx+$$

$$+2\alpha s\sum_{k=1}^{n}k\beta_k\int_a^b x^{s-1}x^{k-1}\,dx=0,\quad s=0,1,\ldots,n, \tag{11}$$

или, используя (10),

$$(1+2\alpha)\sum_{k=0}^{n}\beta_k(x^k, x^s)+2\alpha s\sum_{k=1}^{n}k\beta_k(x^{k-1}, x^{s-1})=(f(x), x^s). \tag{12}$$

Эта система всегда имеет единственное решение, так как ее определитель как определитель Грамма линейно независимых на $[a, b]$ функций $1, x, \ldots, x^n$ всегда положителен.

Теорема 4. *При $n\to\infty$ последовательность полиномов $P_n^\alpha(x)$ стремится к $y^\alpha(x)$ равномерно.*

Доказательство. Перепишем (5) в виде

$$I^\alpha(y^\alpha(x)+h(x))-I^\alpha(y^\alpha(x))=(1+\alpha)\int_a^b h^2(x)\,dx+\alpha\int_a^b[h'(x)]^2\,dx. \tag{13}$$

Обозначив $h(x)=P_n^\alpha(x)-y^\alpha(x)$ и подставив его в (13), получим

$$I^\alpha(P_n^\alpha(x))-I^\alpha(y^\alpha(x))\equiv(1+\alpha)\int_a^b[P_n^\alpha(x)-y^\alpha(x)]^2\,dx+$$

$$+\alpha\int_a^b\{[P_n^\alpha(x)-y^\alpha(x)]'\}^2\,dx. \tag{14}$$

Так как $[y^\alpha(x)]'$ непрерывна, то по теореме Вейерштрасса для любого $\varepsilon>0$ существует последовательность многочленов $\overline{P}_{n-1}^\alpha(x)$ таких, что

$$\max_{x\in[a,b]}|\overline{P}_{n-1}^\alpha(x)-[y^\alpha(x)]'|<\varepsilon. \tag{15}$$

Но

$$\overline{P}_n^\alpha(x) - y^\alpha(x) = \int_a^x \{\overline{P}_{n-1}^\alpha(x) - [y^\alpha(x)]'\}\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \max_{x\in[a,b]} |\overline{P}_{n-1}^\alpha(x) - [y^\alpha(x)]'| \int_a^b dx \leqslant \varepsilon(b-a) = \varepsilon_1 \to 0, \quad \varepsilon \to 0. \tag{16}$$

Учитывая (14) и (16), получаем

$$I^\alpha(P_n^\alpha(x)) - I^\alpha(y^\alpha(x)) \equiv (1+\alpha)\int_a^b [P_n^\alpha(x) - y^\alpha(x)]^2 dx +$$

$$+ \alpha\int_a^b \{[P_n^\alpha(x) - y^\alpha(x)]'\}^2 dx \leqslant I^\alpha(\overline{P}_n^\alpha(x)) - I^\alpha(y^\alpha(x)) =$$

$$= (1+\alpha)\int_a^b [\overline{P}_n^\alpha(x) - y^\alpha(x)]^2 dx + \alpha\int_a^b [(\overline{P}_n^\alpha(x) - y^\alpha(x))']^2 dx \to 0, \tag{17}$$

т. е. величины

$$\int_a^b [P_n^\alpha(x) - y^\alpha(x)]^2 dx \ \text{ и } \int_a^b \{[P_n^\alpha(x) - y^\alpha(x)]'\}^2 dx$$

ограничены. Отсюда следует, что последовательность полиномов $P_n^\alpha(x)$ в $C[a,b]$ образует компактное множество, поэтому она сходится к $y^\alpha(x)$ равномерно.

Замечание. Из самого доказательства теорем 1 и 4 следует, что $\{P_n^\alpha(x)\}'$ стремится к $y'(x)$ в среднем.

Как известно, решение поставленной задачи в конечном счете сводится к решению системы алгебраических уравнений.

Полученные результаты легко обобщаются на любую систему $\{e_k\}_1^\infty$ при условии, что $\{e_k'\}$ — полная в $C[a,b]$ система. Например, в качестве системы $\{e_k\}$ можно взять систему собственных функций $\{\varphi_k\}$ краевой задачи (3), (4). Тогда вместо P_n^α получаем последовательность

$$\Phi_n^\alpha = \sum_{k=1}^n \frac{(e_k, y)}{\lambda_k + \alpha} e_k,$$

где λ_k — собственные числа задачи (3), (4), отвечающие собственным функциям φ_k.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Тихонов, Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье, ДАН СССР, т. 156, № 2, 1964.
2. Э. А. Коддингтон, Н. Левинсон, Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1958.

Поступила 15.VII 1971 г.

Институт кибернетики АН УССР