УДК 517.948.32:517.544

Об одной обобщенной задаче Карлемана

В. И. Макогон

Пусть D^+ — конечная $(m+1)$-связная область, ограниченная контуром Ляпунова L, состоящим из кривой L_0, охватывающей кривые $L_1, L_2, \ldots, L_m$. Дополнение $\overline{D^+}$ до полной плоскости обозначим через $D^- = D_0^- + D_1^- + \ldots + D_m^-$. Пусть $\alpha(t) = \sum\limits_{k=0}^{m} \alpha_k(t)\,\omega(t, L_k)$, где $\omega(t, L_k)$ — гармоническая мера [1] контура L_k относительно области D^+, $\alpha_k(t)$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм контура L_k на себя, удовлетворяющий таким двум условиям:

1) $\alpha_k[\alpha_k(t)] \equiv t$ (условие Карлемана);
2) $\alpha_k'(t) \neq 0$, $\alpha_k'(t) \in H(L_k)$.

Рассмотрим следующую краевую задачу: найти функцию $\Phi^+(z)$, аналитическую в D^+ и H-непрерывную в $\overline{D^+}$ по краевому условию

$$a(t)\,\Phi^+[\alpha(t)] + b(t)\,\overline{\Phi^+[\alpha(t)]} + c(t)\,\Phi^+(t) + d(t)\,\overline{\Phi^+(t)} = h(t), \tag{1}$$

либо по условию

$$a(t)\,\Phi^+[\alpha(t)] + b(t)\,\overline{\Phi^+[\alpha(t)]} + c(t)\,\Phi^+(t) + d(t)\,\overline{\Phi^+(t)} = 0, \tag{1'}$$

где H-непрерывные функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $d(t)$ и $h(t)$ удовлетворяют некоторым условиям, которые будут указаны ниже.

Заменяя в условии (1) t на $\alpha(t)$ и переходя в полученном условии и условии (1) к сопряженным значениям, получим некоторую систему относительно $\Phi^+[\alpha(t)]$, $\overline{\Phi^+[\alpha(t)]}$, $\Phi^+(t)$, $\overline{\Phi^+(t)}$, характеризующуюся определителем

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} a(t) & b(t) & c(t) & d(t) \\ c[\alpha(t)] & d[\alpha(t)] & a[\alpha(t)] & b[\alpha(t)] \\ \overline{b(t)} & \overline{a(t)} & \overline{d(t)} & \overline{c(t)} \\ \overline{d[\alpha(t)]} & \overline{c[\alpha(t)]} & \overline{b[\alpha(t)]} & \overline{a[\alpha(t)]} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Обозначаем через $\Delta_1(t)$ определитель, полученный из $\Delta(t)$ заменой его первого столбца столбцом $\{h(t),\ h[\alpha(t)],\ \overline{h(t)},\ \overline{h[\alpha(t)]}\}$. В дальнейшем будем полагать, что выполнены условия

$$\Delta(t) \equiv 0, \quad \Delta_1(t) \equiv 0. \tag{3}$$

Как следствие, из условий (3) вытекают необходимые условия разрешимости известных граничных задач Карлемана [2] и типа Карлемана [3].

Будем предполагать, что лишь две строки определителя $\Delta(t)$ линейно независимы. Можно показать, что принципиально различными при этом являются только три случая:

1) линейно независимы первая и вторая строки;
2) линейно независимы первая и третья строки;
3) линейно независимы вторая и третья строки.

Рассмотрим первый случай. Решение краевых задач (1) и (1′) можно, очевидно, получить из решений краевых задач

$$a(t)\,\Phi_1^+[\alpha(t)] + b(t)\,\overline{\Phi_2^+[\alpha(t)]} + c(t)\,\Phi_1^+(t) + d(t)\,\overline{\Phi_2^+(t)} = h(t), \tag{4}$$

$$a(t)\,\Phi_1^+[\alpha(t)] + b(t)\,\overline{\Phi_2^+[\alpha(t)]} + c(t)\,\Phi_1^+(t) + d(t)\,\overline{\Phi_2^+(t)} = 0 \tag{4'}$$

для двух функций $\Phi_1^+(z)$, $\Phi_2^+(z)$, аналитических в D^+, потребовав, чтобы $\Phi_1^+(z) \equiv \Phi_2^+(z)$. Связь между решениями задач (1′) и (4′) устанавливает следующая лемма.

Лемма 1. *В случае линейной независимости первой и второй строк определителя $\Delta(t)$ число линейно независимых решений задачи (1′) равно числу линейно независимых решений задачи (4′), причем линейная независимость решений задач (1′) и (4′) понимается, соответственно, над полем вещественных и комплексных чисел.*

Утверждение леммы следует из того, что при выполнении указанных в лемме условий фундаментальную систему решений задачи (4′) можно выбрать в виде пар функций с равными компонентами.

1. Теория Нетера для краевых задач (1) и (4). В работе [4] доказана справедливость следующего утверждения.

Лемма 2. *Если $\alpha(t)$ сохраняет направление обхода на контуре L, а функции $\Phi_1^+(z)$ и $\Phi_2^+(z)$ — аналитические в области D^+, то справедливо интегральное представление*

$$\begin{aligned}\Phi_1^+(z) &= \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau + i\int_L \omega(\tau, L_m)\,\varphi(\tau)\,[d\sigma + d\sigma_\alpha],\\ \Phi_2^+(z) &= -\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)}}{\tau - z}\,d\tau - i\int_L \omega(\tau, L_m)\,\overline{\varphi(\tau)}\,[d\sigma + d\sigma_\alpha],\end{aligned} \tag{5}$$

где $d\sigma$ и $d\sigma_\alpha$ — элементы дуги L, вычисленные соответственно в точках τ и $\alpha(\tau)$; плотность $\varphi(t)$ определена с точностью до слагаемого вида $\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_k\omega(t, L_k)$, в котором C_k — произвольные константы.

Используя (5), формулы Сохоцкого и условие Карлемана $\alpha[\alpha(t)] \equiv t$, сведем краевую задачу (4′) к интегральному уравнению

$$\begin{gathered}[a(t) - d(t)]\,\varphi(t) + [c(t) - b(t)]\,\varphi[\alpha(t)] +\\ + \frac{a(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,\alpha'(\tau)}{\alpha(\tau) - \alpha(t)}\,d\tau + \frac{d(t)}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(\tau)\,\tau'^2}}{\bar\tau - \bar t}\,d\tau +\\ + \frac{c(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi[\alpha(\tau)]}{\tau - t}\,d\tau + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi[\alpha(\tau)]\,\alpha'(\tau)\,\tau'^2}}{\overline{\alpha(\tau)} - \overline{\alpha(t)}}\,d\tau +\\ + i\,[a(t) + b(t) + c(t) + d(t)]\int_L \omega(\tau, L_m)\,\varphi(\tau)\,[d\sigma + d\sigma_\alpha] = 0.\end{gathered} \tag{6}$$

Полученное интегральное уравнение нетерово [5] при выполнении условий

$$d(t)\,d[\alpha(t)] - b(t)\,b[\alpha(t)] \neq 0, \quad a(t)\,a[\alpha(t)] - c(t)\,c[\alpha(t)] \neq 0, \tag{7}$$

а его индекс вычисляется по формуле

$$\varkappa = \operatorname{ind}[\overline{a(t)}\,d(t) - b(t)\,\overline{c(t)}]. \tag{8}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что функции $\omega(t, L_1)$, $\omega(t, L_2)$, ..., $\omega(t, L_{m-1})$ являются собственными функциями уравнения (6). Из формул (5) следует, что этим и только этим решениям отвечает тривиальное решение задачи (4′). Пусть l и k — соответственно числа линейно независимых решений задачи (4′) и уравнения (6) Тогда $l = k - m + 1$.

Интегральное уравнение, союзное к (6), имеет вид

$$[a(t)-d(t)]\psi(t)+\{c[\alpha(t)]-b[\alpha(t)]\}\alpha'(t)\psi[\alpha(t)]-$$

$$-\frac{\alpha'(t)}{\pi i}\int_L\frac{a(\tau)\psi(\tau)+c[\alpha(\tau)]\alpha'(\tau)\psi[\alpha(\tau)]}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}d\tau-$$

$$-\frac{\overline{t'^2}}{\pi i}\int_L\frac{d(\tau)\psi(\tau)+b[\alpha(\tau)]\alpha'(\tau)\psi[\alpha(\tau)]}{\bar\tau-\bar t}d\tau+$$

$$+i\omega(t,L_m)[\overline{t'}+\overline{t'}_{\alpha(t)}\alpha'(t)]\int_L[a(t)+b(t)+c(t)+d(t)]\psi(t)\,dt=0. \quad (9)$$

Интегральное уравнение (9) эквивалентно уравнению

$$[a(t)-d(t)]\psi(t)+\{c[\alpha(t)]-b[\alpha(t)]\}\alpha'(t)\psi[\alpha(t)]-$$

$$-\frac{\alpha'(t)}{\pi i}\int_L\frac{a(\tau)\psi(\tau)+c[\alpha(\tau)]\alpha'(\tau)\psi[\alpha(\tau)]}{\alpha(\tau)-\alpha(t)}d\tau-$$

$$-\frac{\overline{t'^2}}{\pi i}\int_L\frac{d(\tau)\psi(\tau)+b[\alpha(\tau)]\alpha'(\tau)\psi[\alpha(\tau)]}{\bar\tau-\bar t}d\tau=0, \quad (10)$$

т. е. решения уравнения (10) удовлетворяют условию

$$\int_L[a(t)+b(t)+c(t)+d(t)]\psi(t)\,dt=0. \quad (11)$$

Можно показать, что при выполнении условия (11) имеют место равенства

$$a[\alpha(t)]\alpha'(t)\psi[\alpha(t)]+c(t)\psi(t)=\Psi_1^+(t),$$

$$\overline{b[\alpha(t)]\alpha'(t)t'^2\psi[\alpha(t)]}+\overline{d(t)t'^2\psi(t)}=\Psi_2^+(t), \quad (12)$$

где $\Psi_1^+(t)$, $\Psi_2^+(t)$ — предельные значения функций, аналитических в области D^+. Исключив из равенств (12) функцию $\psi(t)$, получим граничное условие задачи

$$\frac{c(t)\alpha'(t)\Psi_1^+[\alpha(t)]-a(t)\Psi_1^+(t)}{a(t)a[\alpha(t)]-c(t)c[\alpha(t)]}+\frac{b(t)\overline{t'^2\Psi_2^+(t)}-d(t)\overline{t'^2\alpha'(t)\Psi_2^+[\alpha(t)]}}{b(t)b[\alpha(t)]-d(t)d[\alpha(t)]}=0, \quad (13)$$

союзной к задаче (4). Число l' линейно независимых решений задачи (13) равно числу k' линейно независимых решений уравнения (9). Разность $l-l'=k-k'-m+1=\varkappa-m+1$ выражает индекс задачи (4). Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 1. *В случае линейной независимости первой и второй строк определителя* (2) *краевая задача* (4) *нетерова с индексом*

$$I=\operatorname{ind}[\overline{a(t)}d(t)-b(t)\overline{c(t)}]-m+1.$$

Для разрешимости задачи (4) *необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int_L h(t)\frac{a[\alpha(t)]\alpha'(t)\Psi_1^+[\alpha(t)]-c[\alpha(t)]\Psi_1^+(t)}{a(t)a[\alpha(t)]-c(t)c[\alpha(t)]}dt=0,$$

где $\Psi_1^+(t)$ — *первая компонента общего решения союзной задачи* (13).

Краевую задачу

$$a_1(t)\,\Psi^+[\alpha(t)] + b_1(t)\,\overline{\Psi^+[\alpha(t)]} + c_1(t)\,\Psi^+(t) + d_1(t)\,\overline{\Psi^+(t)} = 0, \qquad (14)$$

где

$$a_1(t) = \frac{\alpha'(t)\,c(t)}{a(t)\,a[\alpha(t)] - c(t)c[\alpha(t)]}, \qquad b_1(t) = \frac{\overline{t'^2\,\alpha'(t)}\;d(t)}{d(t)\,d[\alpha(t)] - b(t)\,b[\alpha(t)]},$$
$$(15)$$
$$c_1(t) = -\frac{a(t)}{a(t)\,a[\alpha(t)] - c(t)\,c[\alpha(t)]}, \quad d_1(t) = -\frac{\overline{t'^2}\,b(t)}{d(t)\,d[\alpha(t)] - b(t)\,b[\alpha(t)]},$$

назовем союзной к задаче (1).

Легко проверить, что в определителе (2), составленном из коэффициентов $a_1(t)$, $b_1(t)$, $c_1(t)$, $d_1(t)$, линейно независимыми являются те же строки, что и в исходном определителе. Поэтому между общими решениями задачи (14) и задачи (13) существует связь, совершенно аналогичная установленной в лемме 1 связи между общими решениями задачи (4′) и задачи (1′).

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *В случае линейной независимости первых двух строк определителя* (2) *краевая задача* (1) *является нетеровой и ее индекс*

$$I = \operatorname{ind}[\overline{a(t)}\,d(t) - b(t)\,\overline{c(t)}] - m + 1.$$

Для разрешимости задачи (1) *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{Re}\int_L h(t)\,\frac{a[\alpha(t)]\,\alpha'(t)\,\Psi^+[\alpha(t)] - c[\alpha(t)]\,\Psi^+(t)}{a(t)\,a[\alpha(t)] - c(t)\,c[\alpha(t)]}\,dt = 0,$$

где $\Psi^+(z)$ — *общее решение союзной задачи* (14).

2. Некоторые утверждения о разрешимости краевой задачи (1′).

Имеют место следующие утверждения.

Лемма 3. *Если* $|a(t)| > |b(t)|$, $|d(t)| > |c(t)|$ *и* $\operatorname{ind}\dfrac{d(t)}{a(t)} < 0$, *то краевая задача* (1′) *не имеет нетривиальных решений.*

Лемма 4. *Если* $|a(t)| < |b(t)|$, $|d(t)| < |c(t)|$ *и* $\operatorname{ind}\dfrac{c(t)}{b(t)} > 0$, *то краевая задача* (1′) *неразрешима.*

Теорема 3. *Если в определителе* (2) *линейно независимы первая и вторая строки,* $|a(t)| < |b(t)|$, $|d(t)| < |c(t)|$, *выполнены условия* (7) *и* $\varkappa > 2m - 2$, *то краевая задача* (1′) *имеет* $l = \varkappa - m + 1$ *линейно независимых решений.*

Доказательство. При выполнении условий теоремы союзная краевая задача (14) неразрешима. В самом деле, в силу (15)

$$\operatorname{ind}\frac{d_1(t)}{a_1(t)} = \operatorname{ind}\frac{c(t)}{b(t)} + \operatorname{ind}\overline{t'^2} = -\varkappa + 2m - 2 < 0,$$

так как

$$\varkappa = \operatorname{ind} b(t)\,\overline{c(t)}\left[1 - \frac{\overline{a(t)}\,d(t)}{b(t)\,\overline{c(t)}}\right] = -\operatorname{ind}\frac{c(t)}{b(t)}$$

и

$$|a_1(t)| > |b_1(t)|, \quad |d_1(t)| > |c_1(t)|.$$

Таким образом, для союзной задачи (14) выполнены все условия леммы 3, в силу которой $l' = 0$, т. е. $l = \varkappa - m + 1$ и теорема доказана.

Аналогично доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Если в определителе* (2) *линейно независимы первая и вторая строки,* $|a(t)| > |b(t)|$, $|d(t)| > |c(t)|$, *выполнены условия* (7) *и*

$\varkappa > 2m - 2$, *то краевая задача* (1') *имеет* $l = \varkappa - m + 1$ *линейно независимых решений.*

Замечание 1. В случае односвязной области D^+ имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы* 3 *или теоремы* 4, *то краевая задача* (1') *имеет* $l = \max(0, \varkappa + 1)$ *линейно независимых решений. Неоднородная задача* (1) *разрешима при выполнении* $p = \max(0, -\varkappa - 1)$ *условий разрешимости.*

Замечание 2. В случае, когда D^+— единичный круг, то четырехэлементной краевой задаче (1) некоторым образом можно поставить в соответствие краевую задачу Римана для двух пар неизвестных функций. Оказывается, что при выполнении условий теоремы 3 или теоремы 4 матрица задачи Римана имеет устойчивую систему частных индексов.

Случаи 2) и 3) исследуются аналогично изложенному.

В заключение выражаю благодарность Г. С. Литвинчуку и А. П. Нечаеву за помощь в работе, полезное обсуждение результатов и ценные советы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Неванлинна, Однозначные аналитические функции, ИЛ, М., 1941.
2. Д. А. Квеселава, Некоторые граничные задачи теории функций, Труды Математического института АН ГрузССР, т. 16, 1948.
3. Г. С. Литвинчук, Э Г. Хасабов, Об одном типе сингулярных интегральных уравнений, Сиб. матем. ж., т. 5, № 3, 1964.
4. А. П. Нечаев, Обобщенная краевая задача типа задачи Карлемана для многосвязной области, Сообщения II конференции Ростовского математического общества, Ростов-на-Дону, 1969.
5. Г. С. Литвинчук, Теория Нетера системы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом Карлемана и комплексно-сопряженными неизвестными, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 31, № 3, 1967.

Поступила 31.V 1971 г.
Всесоюзный проектно-конструкторский и научно-исследовательский
институт автоматизации пищевой промышленности