институт автоматизации пищевой промышленности

УДК 517.512.6

Приближение многогранными функциями в хаусдорфовой метрике

В. Т. Мартынюк, В. Ф. Сторчай

1. Пусть $\Delta = [a, b; c, d]$ $(a \leqslant b;\ c \leqslant d)$ — произвольный прямоугольник евклидовой плоскости переменных x, y, n и m — фиксированные натуральные числа. Точки $M_{i,k}(x_i, y_k) \in \Delta$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, m;\ a = x_0 < < x_1 < \ldots < x_n = b;\ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d)$ будем называть узлами. Очевидно, узлы $M_{i,k}$ образуют решетку на Δ. Прямоугольники с вершинами в узлах $M_{i,k}, M_{i+1,k}, M_{i,k+1}, M_{i+1,k+1}$ будем обозначать через $\Delta_{i,k}$.

Пусть $f(x, y)$ — функция, заданная и ограниченная на Δ.

Определение 1. Многогранной функцией, вписанной в $f(x, y)$ в узлах $M_{i,k}$, называется такая функция $L_{n,m}(f; x, y)$ для которой:

1) $L_{n,m}(f; x_i, y_k) = f(x_i, y_k)$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, m)$;

2) каждый прямоугольник $\Delta_{i,k}$ можно разбить на два треугольника с вершинами в узлах, на которых $L_{n,m}(f; x, y)$ линейна.

Очевидно, какова бы ни была ограниченная функция $f(x, y)$, многогранная функция $L_{n,m}(f; x, y)$ является непрерывной. $L_{n,m}(f; x, y)$, вообще говоря, определяется неоднозначно.

Хаусдорфовым расстоянием между функциями $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$, заданными и ограниченными на Δ, называется число (см., например, [1 — 3]/

$$r(f;\varphi)=\max[\max_{P_1\in\bar f}\min_{P_2\in\bar\varphi}\rho(P_1P_2);\quad \max_{P_1\in\bar\varphi}\min_{P_2\in\bar f}\rho(P_1,P_2)], \tag{1}$$

где

$$\rho(P_1,P_2)=\rho(P_1(x_1,y_1,z_1),P_2(x_2,y_2,z_2))=\max[|x_1-x_2|,|y_1-y_2|,|z_1-z_2|], \tag{2}$$

$\bar f(\bar\varphi)$ — дополненный график функции $f(x,y)$ $(\varphi(x,y))$ [1 — 3], т. е. пересечение всех ограниченных и замкнутых точечных множеств пространства переменных x,y,z, выпуклых относительно оси Z и содержащих все точки $(x,y,f(x,y))$ $((x,y,\varphi(x,y)))$, $(x,y)\in\Delta$. Так как $L_{n,m}(f;x,y)$ — непрерывная функция, то дополненный график $\bar L_{n,m}(f)$ совпадает с ее графиком.

Для дальнейшего понадобится следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $f(x,y)$— заданная и ограниченная на $\Delta=[a,b;c,d]$ функция, $\bar f$ ее дополненный график и $P_0(x_0,y_0,z_0)$ — произвольная точка множества $\bar f$. Для произвольных чисел $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$ обозначим*

$$\Delta(x_0,y_0;\delta_1,\delta_2)=[x_0-\delta_1,\ x_0+\delta_1;\ y_0-\delta_2,\ y_0+\delta_2]\cap\Delta.$$

Тогда справедливы неравенства

$$\inf_{(x,y)\in\Delta(x_0,y_0;\delta_1,\delta_2)}f(x,y)\leqslant z_0\leqslant\sup_{(x,y)\in\Delta(x_0,y_0;\delta_1,\delta_2)}f(x,y).$$

Действительно, если бы, например, $z_0>\sup\limits_{(x,y)\in\Delta(x_0,y_0;\delta_1,\delta_2)}f(x,y)=A$, то для $0<\varepsilon<z_0-A$ и всех $(x,y)\in\Delta(x_0,y_0;\delta_1,\delta_2)$ имели бы место неравенства $f(x,y)<z_0-\varepsilon$, что невозможно в силу определения дополненного графика $\bar f$.

Будем изучать отклонение ограниченных функций $f(x,y)$, заданных на прямоугольнике Δ, от вписанных в них многогранных функций $L_{n,m}(f;x,y)$ в хаусдорфовой метрике (1). Аналогичная задача для случая функций одного переменного в равномерной и интегральных метриках решалась в работах [4 и 5].

2. Пусть $\Delta(x_1y_1;x_2,y_2)$ $(x_1\leqslant x_2,\ y_1\leqslant y_2)$ — прямоугольник в плоскости x,y.

Определение 2. Модулем немонотонности ограниченной функции $f(x,y)$, заданной на прямоугольнике $\Delta=[a,b;c,d]$, будем называть выражение (см., например, [1 — 3])

$$\mu(f;t,\tau)=\sup_{\substack{|x_1-x_2|\leqslant t\\ |y_1-y_2|\leqslant\tau}}\{\sup_{(x,y)\in\Delta(x_1,y_1;x_2,y_2)\subset\Delta}[|f(x_1,y_1)-$$
$$-f(x,y)|+|f(x_2,y_2)-f(x,y)|]-|f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)|\}. \tag{3}$$

Укажем на некоторые очевидные свойства модуля немонотонности.

а) $\mu(f;t,\tau)$ — неубывающая функция определенная для всех $t,\tau\geqslant0$ и ограничена. (Тут и в дальнейшем термин «неубывающая функция двух переменных» нужно понимать так: $f(x_1,y_1)\leqslant f(x_2,y_2)$ для $x_1\leqslant x_2$, $y_1\leqslant y_2$).

б) $\mu(f;0,0)=0$.

в) Если $f(x,y)$ монотонна по каждой переменной, то $\mu(f;t,\tau)=0$.

В дальнейшем будем рассматривать только такие функции $f(x,y)$, для которых $\lim\limits_{t,\tau\to0}\mu(f;t,\tau)=0$.

Лемма 2. *Какова бы ни была ограниченная неубывающая функция $\mu(t,\tau)$, определенная для всех $t,\tau\geqslant0$, для которой $\mu(0,0)=0$ и $\lim\limits_{t,\tau\to0}\mu(t,\tau)=0$, существует функция $f_0(x,y)$ такая, что $\mu(f_0;t,\tau)=$ $=\mu(t,\tau)$.*

Действительно, рассмотрим функцию

$$f_0(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu(x, y) & \text{для } x, y \geqslant 0,\ x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{для } x < 0,\ y > 0 \text{ и } x > 0,\ y < 0, \\ B & \text{для } x, y \leqslant 0, \end{cases}$$

где $B = \sup\limits_{(x,y)} \mu(x, y)$. Для каждой пары чисел $t, \tau \geqslant 0$ имеем

$$\mu(f_0; t, \tau) = \sup_{(x,\, y) \in \Delta(0,\, 0;\, t,\, \tau)} [\,|f_0(0, 0) - f_0(x, y)| + |f_0(t, \tau) - f_0(x, y)|\,] -$$

$$- |f_0(0, 0) - f_0(t, \tau)| = |f_0(0, 0) - \frac{1}{2}\mu(0, 0)| + |f_0(t, \tau) - \frac{1}{2}\mu(0, 0)| -$$

$$- |f_0(0, 0) - f_0(t, \tau)| = B + \frac{1}{2}\mu(t, \tau) - |B - \frac{1}{2}\mu(t, \tau)| = \mu(t, \tau),$$

и лемма 2 доказана.

Исходя из этого, примем такое определение.

Определение 3. Модулем немонотонности называется всякая неубывающая ограниченная функция $\mu(t, \tau)$, заданная для всех $t, \tau \geqslant 0$, и такая что $\lim\limits_{t,\, \tau \to 0} \mu(t, \tau) = \mu(0, 0) = 0$.

Через $M_\mu(\Delta)$ обозначим множество ограниченных на прямоугольнике Δ функций $f(x, y)$, имеющих мажорантой своих модулей немонотонности заданный модуль немонотонности $\mu(t, \tau)$.

В силу леммы 2 класс $M_\mu(\Delta)$ не пустой для любого $\mu(t, \tau)$.

Если в случае равномерной и интегральных метрик удобной характеристикой приближения функций многогранными функциями является модуль непрерывности [4, 5], то в случае хаусдорфовой метрики (1) удобной характеристикой такого приближения, как будет видно ниже, является модуль немонотонности.

3. Теорема 1. *Пусть $f(x, y)$ — ограниченная функция, заданная на прямоугольнике $\Delta = [a, b; c, d]$ и $L_{n,m}(f, x, y)$ — какая-нибудь многогранная, функция, вписанная в $f(x, y)$ в узлах $M_{i,k}(x_i, y_k)$ $(i = 0, 1, \ldots, n;\ k = 0, 1, \ldots, m;\ \ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b;\ \ c = y_0 < y_1 < \ldots < y_m = d)$. Если $\mu(f; t, \tau)$ — модуль немонотонности* (3) *функции $f(x, y)$, то справедливо неравенство*

$$r(f; L_{n,m}(f)) \leqslant \max\left[\lambda, \eta, \frac{1}{2}\mu(f; \lambda, \eta)\right], \tag{4}$$

где $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n}(x_i - x_{i-1})$, $\eta = \max\limits_{k=1,2,\ldots,m}(y_k - y_{k-1})$.

Теорема 1, в силу равенства (1), непосредственно следует из следующих двух лемм.

Лемма 3. *В условиях теоремы* 1 *для каждой точки $P_1(x', y', z')$ из дополненного графика $\bar{f}$ функции $f(x, y)$ найдется на графике $\bar{L}_{n,m}(f)$ функции $L_{n,m}(f; x, y)$ такая точка $P_2(x'', y'', z'')$, что*

$$\rho(P_1, P_2) \leqslant \max\left[\lambda, \eta, \frac{1}{2}\mu(f; \lambda, \eta)\right], \tag{5}$$

где $\rho(P_1, P_2)$ определяетс равенством (2).

Доказательство. Пусть $P_1(x', y', z')$ — произвольная точка множества $\bar{f}$. Через Δ_{i_0,k_0} обозначим тот из прямоугольников $\Delta_{i,k}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n-1;\ k = 0, 1, 2, \ldots, m-1)$, который содержит точку (x', y') и для которого или число z' находится между числами $f(x_{i_0}, y_{k_0})$ и $f(x_{i_0+1}, y_{k_0+1})$, или выполняется одно из условий

$$\sup_{(x,y)\in\Delta_{i_0,k_0}} f(x, y) \geqslant z' \quad \text{при} \quad z' > \max[f(x_{i_0}, y_{k_0}), f(x_{i_0+1}, y_{k_0+1})],$$

$$\inf_{(x,y)\in\Delta_{i_0,k_0}} f(x, y) \leqslant z' \quad \text{при} \quad z' < \min[f(x_{i_0}, y_{k_0}), f(x_{i_0+1}, y_{k_0+1})].$$

В силу леммы 1 такой прямоугольник существует. Если их больше одного, то выбираем один из них.

Если число z' находится между числами $f(x_{i_0}, y_{k_0})$ и $f(x_{i_0+1}, y_{k_0+1})$, то обозначим через x'', y'' одно из решений уравнения $L_{n,m}(f; x, y) = z'$ ($(x, y) \in \in \Delta_{i_0,k_0}$), для точки $P_2(x'', y'', L_{n,m}(f; x'', y''))$ имеем

$$\rho(P_1, P_2) = \max[|x' - x''|, |y'' - y'|, |L_{n,m}(f; x'', y'') - z'|] \leqslant$$

$$\leqslant \max[|x_{i_0+1} - x_{i_0}|, |y_{k_0+1} - y_{k_0}|] \leqslant \max[\lambda, \eta] \leqslant$$

$$\leqslant \max\left[\lambda, \eta, \frac{1}{2}\mu(f; \lambda, \eta)\right],$$

и в этом случае лемма 3 доказана.

Пусть теперь, например, $z' > \max[f(x_{i_0}, y_{k_0}), f(x_{i_0+1}, y_{k_0+1})]$ и

$$\sup_{(x,y)\in\Delta_{i_0,k_0}} f(x, y) \geqslant z'. \tag{6}$$

Учитывая (3), (6) и предполагая для определенности, что $f(x_{i_0}, y_{k_0}) \geqslant \geqslant f(x_{i_0+1}, y_{k_0+1})$, получаем

$$\mu(f; \lambda, \eta) \geqslant \sup_{\substack{(x,y)\in\Delta_{i_0,k_0} \\ f(x,y)\geqslant f(x_{i_0}, y_{k_0})}} [|f(x_{i_0}, y_{k_0}) - f(x, y)| + |f(x_{i_0+1}, y_{k_0+1}) -$$

$$- f(x, y)|] - |f(x_{i_0}, y_{k_0}) - f(x_{i_0+1}, y_{k_0+1})| = 2 \sup_{\substack{(x,y)\in\Delta_{i_0,k_0} \\ f(x,y)\geqslant f(x_{i_0}, y_{k_0})}} [f(x, y) -$$

$$- f(x_{i_0}, y_{k_0})] \geqslant 2[z' - f(x_{i_0}, y_{k_0})] = 2[z' - L_{n,m}(f; x_{i_0}, y_{k_0})]. \tag{7}$$

Так как $|x' - x_{i_0}| \leqslant \lambda$, $|y' - y_{k_0}| \leqslant \eta$, то, полагая $x'' = x_{i_0}, y'' = y_{k_0}$, $z'' = = L_{n,m}(f; x_{i_0}, y_{k_0})$, для точки $P_2(x'', y'', z'')$ в силу (7) справедливо неравенство (5). Лемма 3 доказана полностью.

Лемма 4. *В условиях теоремы* 1 *для каждой точки* $P_1(x', y', z')$ *из графика функции* $L_{n,m}(f; x, y)$ *существует точка* $P_2(x'', y'', z'') \in \bar{f}$ *такая, что*

$$\rho(P_1, P_2) \leqslant \max[\lambda, \eta].$$

Доказательство. Пусть $P_1(x', y', z')$ — произвольная точка графика функции $L_{n,m}(f; x, y)$. Тогда $L_{n,m}(f; x', y') = z'$. Обозначим через Δ_{i_0,k_0} ($i_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$, $k_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$) один из прямоугольников $\Delta_{i,k}$ содержащих точку (x', y'), т. е.

$$x_{i_0} \leqslant x' \leqslant x_{i_0+1}, \quad y_{k_0} \leqslant y' \leqslant y_{k_0+1}.$$

В силу определения функции $L_{n,m}(f; x, y)$, среди чисел $f(x_{i_0}, y_{k_0})$, $f(x_{i_0+1}, y_{k_0})$, $f(x_{i_0}, y_{k_0+1})$, $f(x_{i_0+1}, y_{k_0+1})$ существуют по крайней мере два числа, между которыми находится число z'. Поэтому, так как множество $\bar{f}$ связное, замкнутое и выпуклое относительно оси Z, найдется точка $(x'', y'') \in$

$\in \Delta_{i_0,k_0}$ такая, что точка $P_2(x'', y'', z') \in \bar{f}$ является искомой, ибо

$$\rho(P_1, P_2) = \max[|x' - x''|, |y' - y''|] \leqslant$$
$$\leqslant \max[|x_{i_0+1} - x_{i_0}|, |y_{k_0+1} - y_{k_0}|] \leqslant \max[\lambda, \eta].$$

Лемма 4 доказана.

Теорема 2. *Каков бы ни был модуль немонотонности* $\mu(t, \tau)$ *справедливо равенство*

$$\sup_{f \in M_\mu(\Delta)} r(f; L_{n,m}(f)) = \max\left[\lambda, \eta, \frac{1}{2}\mu(\lambda, \eta)\right]. \quad (8)$$

Доказательство. В силу теоремы 1

$$\sup_{f \in M_\mu(\Delta)} r(f; L_{n,m}(f)) \leqslant \max\left[\lambda, \eta, \frac{1}{2}\mu(\lambda, \eta)\right]. \quad (9)$$

Предположим для определенности, что $\lambda = x_1 - x_0$, $\eta = y_1 - y_0$. Пусть

$$\max\left[\lambda, \eta, \frac{1}{2}\mu(\lambda, \eta)\right] = \frac{1}{2}\mu(\lambda, \eta). \quad (10)$$

Рассмотрим функцию $f_0(x, y)$, заданную на Δ равенствами

$$f_0(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mu\left(2\left|x - \frac{x_1 - x_0}{2}\right|, 2\left|y - \frac{y_1 - y_0}{2}\right|\right), & \text{если } x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ & y_0 \leqslant y \leqslant y_1, \\ f_0(x_1, y) & , \text{ если } x_1 < x \leqslant x_n, \\ & y_0 \leqslant y \leqslant y_1, \\ f_0(x, y_1) & , \text{ если } x_0 \leqslant x \leqslant x_1, \\ & y_1 < y \leqslant y_m, \\ f_0(x_1, y_1) & , \text{ если } x_1 < x \leqslant x_n, \\ & y_1 < y \leqslant y_m. \end{cases}$$

Очевидно, $f_0(x, y) \in M_\mu(\Delta)$ и $L_{n,m}(f_0; x, y) \equiv \frac{1}{2}\mu(\lambda, \eta)$.

Имеем

$$r(f_0; L_{n,m}(f_0)) \geqslant \max_{P_1 \in \bar{f}_0} \min_{P_2 \in \bar{L}_{n,m}(f_0)} \rho(P_1, P_2) \geqslant$$
$$\leqslant \min_{(x,y)\in\Delta} \max\left[\left|x - \frac{\lambda}{2}\right|, \left|y - \frac{\eta}{2}\right|, |L_{n,m}(f_0; x, y)|\right] = \frac{1}{2}\mu(\lambda, \eta),$$

что вместе с (9) для случая (10) дает $\sup\limits_{f \in M_\mu(\Delta)} r(f; L_{n,m}(f)) = \frac{1}{2}\mu(\lambda, \eta)$.

Пусть теперь

$$\max\left[\lambda, \eta, \frac{1}{2}\mu(\lambda, \eta)\right] = \lambda \quad (11)$$

$\left(\text{случай } \max\left[\lambda, \eta, \frac{1}{2}\mu(\lambda, \eta)\right] = \eta \text{ рассматривается аналогично}\right)$.

Задав произвольное число $\varepsilon > 0$, рассмотрим функцию

$$f_\varepsilon(x, y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\varepsilon}, & \text{если } x = a, \ c \leqslant y \leqslant d, \\ 0, & \text{если } a < x \leqslant b, \ c \leqslant y \leqslant d. \end{cases}$$

Очевидно, $f_\varepsilon(x, y) \in M_\mu(\Delta)$. Тогда

$$L_{n,m}(f_\varepsilon; x, y) = \begin{cases} -\dfrac{x}{\varepsilon} + \dfrac{\lambda + a}{\varepsilon} & \text{при } a \leqslant x \leqslant a + \lambda,\ c \leqslant y \leqslant d, \\ 0 & \text{при } a + \lambda \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d \end{cases}$$

и

$$r(f_\varepsilon; L_{n,m}(f_\varepsilon)) \geqslant \min_{(x,y)\in\Delta} \max[|x - a|, |y - c|, |L_{n,m}(f_\varepsilon; x, y)|] =$$

$$= \min_{a \leqslant x \leqslant a+\lambda} \max\left[x - a, -\frac{1}{\varepsilon}x + \frac{a+\lambda}{\varepsilon}\right] = \frac{a(1+\varepsilon)+\lambda}{1+\varepsilon} =$$

$$= (1-\varepsilon)\lambda + \frac{a(1+\varepsilon)+\varepsilon^2\lambda}{1+\varepsilon} > (1-\varepsilon)\lambda.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ для случая (11) имеем $\sup\limits_{f\in M_\mu(\Delta)} r(f; L_{n,m}(f)) = \lambda$ и теорема 2 доказана.

Следствие. *Для произвольного модуля немонотонности $\mu(t, \tau)$ и всех $n, m = 1, 2, \ldots$ справедливы равенства*

$$\inf_{(x_i, y_k)} \sup_{f\in M_\mu(\Delta)} r(f; L_{n,m}(f)) = \max\left[\frac{b-a}{n}, \frac{d-c}{m}, \frac{1}{2}\mu\left(\frac{b-a}{n}, \frac{d-c}{m}\right)\right].$$

Заметим, наконец, что аналогичные рассуждения можно было бы провести для функций одного переменного. Рассуждения при этом только упрощаются. Так, например, если $M_\mu(\Delta)$ — класс функций $f(x)$, заданных на отрезке $\Delta = [a, b]$, имеющих мажорантой своих модулей немонотонности $\mu(f; t)$ (см. [6]) заданный модуль немонотонности $\mu(t)$, и $L_n(f; x)$ — ломаная, вписанная в $f(x)$ в узлах $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ $(n = 1, 2, \ldots)$ [4, 5], то справедлива такая теорема.

Теорема 3. *Каков бы ни был модуль немонотонности $\mu(t)$ для всех $n = 1, 2 \ldots$ справедливы равенства*

$$\sup_{f\in M_\mu(\Delta)} r(f; L_n(f)) = \max\left[\lambda, \frac{1}{2}\mu(\lambda)\right],$$

где $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} (x_i - x_{i-1})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бл. Сендов, Линейные методы приближения периодических функций относительно одной метрики хаусдорфовского типа, ДАН СССР, т. 160, № 5, 1965.
2. Бл. Сендов, О теоремах П. П. Коровкина для сходимости последовательности линейных положительных операторов, ДАН СССР, т. 177, № 3, 1967.
3. В. Т. Мартынюк, О линейных методах приближения ограниченных функций двух переменных относительно одной метрики хаусдорфова типа, Изв. вузов, Математика, № 7 (74), 1968.
4. В. Н. Малоземов, Об отклонении ломаных, Вестник ЛГУ, № 7, 1966.
5. В. Ф. Сторчай, Об отклонении ломаных в метрике L_p, Матем. заметки, т. 5, вып. 1, 1969.
6. В. Т. Мартынюк, О приближении функциями В. А. Стеклова в хаусдорфовой метрике, Матем. заметки, т. 5, вып. 1, 1969.

Поступила 6.V 1971 г.
после переработки — 12.I 1972 г.

Черновицкий государственный университет,
Днепропетровский государственный университет