УДК 517.948

# Об одном методе решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра

*М. И. Розовский, Ф. Б. Бадалов*

В работе [1] предложен метод решения нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, основанный на использовании степенных рядов.

В данной работе этод метод распространяется на случай решения системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра с сингулярным ядром релаксации.

Как известно, динамические задачи теории вязко-упругости сводятся к решению системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\begin{gathered} \ddot{y} + \varphi_1 [\theta_1(t), y, z] = \int_0^t R(t-\tau)\, \varphi_1 [\theta_1(\tau), y(\tau), z(\tau)]\, d\tau + g_1(t), \\ \ddot{z} + \varphi_2 [\theta_2(t), y, z] = \int_0^t R(t-\tau)\, \varphi_2 [\theta_2(\tau), y(\tau), z(\tau)]\, d\tau + g_2(t) \end{gathered} \tag{1}$$

при начальных условиях

$$y(0) = y_0,\ \dot{y}(0) = \dot{y}_0,\ z(0) = z_0,\ \dot{z}(0) = \dot{z}_0, \tag{2}$$

где $R(t) = Ae^{-\beta t} t^{\alpha-1}$ $(0 < \alpha < 1)$ — ядро релаксации; $g_1(t)$, $g_2(t)$, $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ — известные функции времени [2].

Полагая

$$y = e^{-\beta t} u,\ z = e^{-\beta t} v,\ g_i(t) = e^{-\beta t} f_i(t), \tag{3}$$

$$\varphi_i [\theta_i(t), y, z] = e^{-\beta t} \bar{\varphi}_i [\bar{\theta}_i(t), u, v],\ i = 1, 2,$$

систему (1) приведем к виду

$$\begin{gathered} \ddot{u} - 2\beta\dot{u} + \beta^2 u + \bar{\varphi}_1 [\bar{\theta}_1(t), u, v] = \\ = A\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, \bar{\varphi}_1 [\bar{\theta}_1(\tau), u(\tau), v(t)]\, d\tau + f_1(t), \\ \ddot{v} - 2\beta\dot{v} + \beta^2 v + \bar{\varphi}_2 [\bar{\theta}_2(t), u, v] = \\ = A\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\, \bar{\varphi}_2 [\bar{\theta}_2(\tau), u(\tau), v(\tau)]\, d\tau + f_2(t). \end{gathered} \tag{4}$$

Решение системы (4) ищем в виде

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)} t^n, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(1)} t^n. \tag{5}$$

Тогда любую целую степень от $u$ и $v$ можно представить степенным рядом

$$u^k = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} t^n, \quad v^k = \sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(k)} t^n, \tag{6}$$

где $a_n^{(k)}$, $b_n^{(k)}$ вычисляются по формуле Коши [1]:

$$a_n^{(2)} = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(1)} a_{n-j}^{(1)}, \ldots, \quad a_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} a_j^{(k-1)} a_{n-j}^{(1)},$$

$$b_n^{(2)} = \sum_{j=0}^{n} b_j^{(1)} b_{n-j}^{(1)}, \ldots, \quad b_n^{(k)} = \sum_{j=0}^{n} b_j^{(k-1)} b_{n-j}^{(1)}. \tag{7}$$

Представляя $\overline{\theta}_i(t)$, $f_i(t)$ также в виде ряда

$$\overline{\theta}_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} r_{i,n} t^n, \quad f_i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{i,n} t^n, \quad i = 1, 2, \tag{8}$$

получаем

$$\overline{\varphi}_i[\theta_i(t), u, v] = \sum_{n=0}^{\infty} F_i(r_{i,n}, a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(k)}, b_n^{(1)}, \ldots, b_n^{(k)}) t^n, \tag{9}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_i(r_{i,n}, a_n^{(1)}, \ldots, b_n^{(k)}) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \tau^n \, d\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_i(r_{i,n}, a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(k)}, b_n^{(1)}, \ldots, b_n^{(k)}) B(\alpha, n+1) t^n t^\alpha =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_i(r_{i,n}, a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(k)}, b_n^{(1)}, \ldots, b_n^{(k)}) B(\alpha, n+1) t^n \sum_{n=0}^{\infty} \varkappa_n(\alpha) t^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \overline{F}_i(r_{i,n}, \varkappa_n(\alpha), a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(k)}, b_n^{(1)}, \ldots, b_n^{(k)}) t^n, \tag{10}$$

где $B(\alpha, n+1)$— бэта-функция Эйлера.

$$\overline{F}_i(r_{i,n}, \varkappa_n(\alpha), a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(k)}, b_n^{(1)}, \ldots, b_n^{(k)}) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} F_i(r_{i,m}, a_m^{(1)}, \ldots, a_m^{(k)}, b_m^{(1)}, \ldots, b_m^{(k)}) B(\alpha, m+1) \varkappa_{n-m}(\alpha). \tag{11}$$

Для удобства выкладок производные $\dot{u}, \ddot{u}, \dot{v}, \ddot{v}$ представим в виде

$$\dot{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{a}_{n+1}^{(1)} t^n, \quad \ddot{u} = \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{a}_{n+2}^{(1)} t^n, \quad \dot{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \dot{b}_{n+1} t^n, \quad \ddot{v} = \sum_{n=0}^{\infty} \ddot{b}_{n+2}^{(1)} t^n, \tag{12}$$

где введены обозначения

$$\dot{a}_{n+1}^{(1)} = (n+1) a_{n+1}^{(1)}, \quad \ddot{a}_{n+2}^{(1)} = (n+1)(n+2) a_{n+2}^{(1)},$$

$$\dot{b}_{n+1}^{(1)} = (n+1) b_{n+1}^{(1)}, \quad \ddot{b}_{n+2}^{(1)} = (n+1)(n+2) b_{n+2}^{(1)}. \tag{13}$$

Подставляя (5), (6) и (8) — (12) в (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $t^n$ для определения неизвестных коэффициентов получим рекуррентные формулы:

$$a_{n+2}^{(1)} = \frac{2\beta \dot{a}_{n+1}^{(1)} - \beta^2 a_n^{(1)} - F_1(r_{1,n} a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(k)} b_n^{(1)}, \ldots, b_n^{(k)})}{(n+1)(n+2)} +$$

$$+ \frac{C_{1,n} + A\overline{F}_1(r_{1,n}, \varkappa_n(\alpha), a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)} b_n^{(1)}, \ldots, b_n^{(k)})}{(n+1)(n+2)},$$

$$b_{n+2}^{(1)} = \frac{2\beta \dot{b}_{n+1}^{(1)} - \beta^2 b_n^{(1)} - F_2(r_{2,n}, a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(k)}, b_n^{(1)}, \ldots, b_n^{(k)})}{(n+1)(n+2)} +$$

$$+ \frac{C_{2,n} + A\overline{F}_2(r_{2,n}, \varkappa_n(\alpha), a_n^{(1)}, \ldots, a_n^{(k)}, b_n^{(1)}, \ldots, b_n^{(k)})}{(n+1)(n+2)},$$

$a_0^{(1)} = y_0,\ a_1^{(1)} = \dot{y}_0 + \beta y_0,\ b_0^{(1)} = z_0,\ b_1^{(1)} = \dot{z}_0 + \beta z_0.$

Сходимость ряда (5) исследуется аналогично как в работе [1].

В заключение отметим, что метод П. Ф. Фильчакова [1] без особого труда может быть распространен для решения более общих интегро-дифференциальных уравнений вида

$$\ddot{y}_j + \varphi_1[\theta_1(t), y_1, \ldots, y_N, z_1, \ldots, z_N] = \int_0^t R(t-\tau)\varphi_1[\theta_1(\tau), y_1, \ldots, y_N,$$

$$z_1, \ldots, z_N]\, d\tau,$$

$$\ddot{z}_j + \varphi_2[\theta_2(t), y_1, \ldots, y_N, z_1, \ldots, z_N] =$$

$$= \int_0^t R(t-\tau)\varphi_2[\theta_2(\tau), y_1, \ldots, y_N, z_1, \ldots, z_N]\, d\tau, \quad j = 1, 2, \ldots, N$$

и его алгоритм является удобным с точки зрения алгоритмизации расчетов динамических задач вязко-упругости на ЭВМ.

## ЛИТЕРАТУРА


1. П. Ф. Фильчаков, Решение нелинейных и линейных обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем при помощи степенных рядов, УМЖ, т. 21, № 2, 1969.
2. М. А. Колтунов, К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации, Механика полимеров, № 4, 1968.


Поступила 7.III 1971 г.
Днепропетровский горный институт,
Институт кибернетики с ВЦ АН УзССР