УДК 517.51

# Общий вид линейного функционала и критерий полинома наилучшего приближения в пространствах со смешанной интегральной метрикой

*Г. С. Смирнов*

**1°**. В работах В. К. Дзядыка [1, 2] было показано, что для хорошего приближенного решения с помощью полиномов интегральных уравнений Фредгольма II рода важно уметь строить полиномы хорошего приближения ядер этих уравнений $K(x, y)$ в метрике вида

$$\| K(x, y) \|_{CL} = \max_{x} \int_{a}^{b} | K(x, y) | dy.$$

Существует также ряд вопросов в теории интегральных операторов, которые приводят к смешанной интегральной метрике. Так, например, известно (см. [3, стр. 104]), что если ядро $K(x, y)$ линейного интегрального оператора удовлетворяет условию

$$\int^{d} \left[ \int^{b} | K(x,y) |^{p} dx \right]^{\frac{q}{p}} dy < \infty \quad (1 \leqslant p,\ q < \infty),$$

то оператор $K(\varphi)=\int\limits_a^b K(x,y)\,\varphi(x)\,dx$ действует из $L_\alpha$ в $L_q$, где $\alpha = = \frac{p}{p-1}$. Число подобных примеров достаточно велико. Ввиду этого в этой статье рассмотрим некоторые вопросы теории приближений функций, касающиеся пространства $L_{p,q}$ измеримых на квадрате $[a, b]\times[c, d]$ функций $f(x, y)$, для которых норма определяется по формуле

$$\left\{\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b |f(x, y)|^p dx\right]^{\frac{q}{p}} dy\right\}^{\frac{1}{q}} \quad (1 \leqslant p, q < \infty)$$

и конечна, а именно: установим общий вид линейного функционала в этом пространстве и критерий полинома наилучшего приближения*.

**2°.** В дальнейшем, наряду с каждым из пространств $L_{p,q}$ будем рассматривать пространство $L_{p',q'}$, где числа $p$, $p'$ и $q$, $q'$ удовлетворяют соответственно условиям

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1, \qquad \frac{1}{q}+\frac{1}{q'}=1. \tag{1}$$

Учитывая равенства

$$\lim_{q\to\infty}\left\{\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b |f(x, y)|^p dx\right]^{\frac{q}{p}} dy\right\}^{\frac{1}{q}} = \operatorname*{ess\,sup}_{y\in[c,d]}\left[\int\limits_a^b |f(x, y)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}},$$

$$\lim_{p\to\infty}\left\{\int\limits_c^d\left[\int\limits_a^b |f(x, y)|^p dx\right]^{\frac{q}{p}} dy\right\}^{\frac{1}{q}} = \left\{\int\limits_c^d [\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |f(x, y)|]^p dy\right\}^{\frac{1}{q}}$$

целесообразно ввести в рассмотрение также классы $L_{p,\infty}, L_{\infty,q}$ функций $f(x, y)$, нормы которых определяются по формулам

$$\|f\|_{L_{p,\infty}} = \operatorname*{ess\,sup}_{y\in[c,d]}\left[\int\limits_a^b |f(x, y)|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}, \quad \|f\|_{L_{\infty,q}} = \left\{\int\limits_c^d [\operatorname*{ess\,sup}_{x\in[a,b]} |f(x,y)|]^q dy\right\}^{\frac{1}{q}}$$

и конечны. Поэтому наряду с пространствами $L_{p,1}$ и $L_{1,q}$ будем соответственно рассматривать пространства $L_{p',\infty}$ и $L_{\infty,q'}$.

Теперь для любых пар функций $f(x, y)\in L_{p,q}$ и $\varphi(x, y)\in L_{p',q'}$ легко получить обобщение неравенства Гельдера вида

$$\left|\int\limits_a^b\int\limits_c^d f(x, y)\,\varphi(x, y)\,dxdy\right| \leqslant \|f\|_{L_{p,q}}\cdot\|\varphi\|_{L_{p',q'}}. \tag{2}$$

В дальнейшем потребуются также следующие оценки для норм функций в различных пространствах:

$$(2\pi)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\|f\|_{L_p} \leqslant \|f\|_{L_{p,q}} \leqslant (2\pi)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\|f\|_{L_q} \quad (1 \leqslant p < q < \infty). \tag{3}$$

Неравенства (2) и (3) легко доказать, применяя неравенство Гельдера для интегралов. Установим следующую теорему.

---

* Эта задача предложена В. К. Дзядыком.

Теорема 1. *Всякий линейный непрерывный функционал, заданный в пространстве $L_{p,q}$, имеет вид*

$$F(f) = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\,\alpha(x, y)\,dxdy, \tag{4}$$

*где $f(x, y)$ — произвольная функция из $L_{p,q}$, а $\alpha(x, y)$ — некоторая функция из $L_{p',q'}$, определяемая по функционалу $F$, и при этом*

$$\| F \| = \| \alpha\ (x, y) \|_{L_{p',q'}}. \tag{5}$$

Доказательство. Для краткости ограничимся случаем $1 < p < q < \infty$. Пусть $F$ — линейный непрерывный функционал, заданный в $L_{p,q}$. Рассмотрим значения этого функционала на характеристических функциях $X_E(x, y)$, измеримых подмножеств $E \subset [a, b] \times [c, d]$.
Вследствие неравенства (3) будем иметь

$$| F(X_E) | \leqslant \| F \| \| X_E \|_{L_{p,q}} \leqslant \|F\| (2\pi)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \| X_E \|_{L_q} \leqslant \| F \| (2\pi)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} (\mathrm{mes} E)^{\frac{1}{q}}.$$

Отсюда следует, что функция множеств $\Phi(E) \overset{df}{=} F(X_E)$ будет аддитивной и абсолютно непрерывной и по теореме Радона — Никодима (см. [4, стр. 332]) найдется суммируемая функция $\alpha(x, y)$ такая, что

$$F(X_E) = \Phi(E) = \iint_E \alpha(x, y)\,dxdy = \int_a^b \int_c^d X_E(x, y)\,\alpha(x, y)\,dxdy.$$

В дальнейшем при доказательстве повторяются рассуждения соответствующих классических теорем о виде линейного непрерывного функционала (см. [5, стр. 188]). А именно: убеждаемся, что формула (4) имеет место для каждой простой, а потом и ограниченной функции. Далее устанавливается, что $\alpha(x, y) \in L_{p',q'}$ и после этого доказывается справедливость формулы (4) для произвольной функции $f(x, y) \in L_{p,q}$. Нетрудно также убедиться, что $\| \alpha \|_{L_{p',q'}} = \| F \|$.

3°. В дальнейшем существенную роль будет играть следующий результат С. М. Никольского, полученный в работе [6].

Теорема 2. 1) *Если $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ — элементы линейного нормированного пространства $E$, то*

$$\min_{\lambda} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\| = \max_{\substack{\|F\| \leqslant 1 \\ F(x_k) = 0}} F(x), \tag{6}$$

*где минимум распространен на всевозможные системы чисел $\lambda_k$, а максимум — на всевозможные линейные функционалы $F$, определенные на $E$ в $\| F \| \leqslant 1$, удовлетворяющие равенствам $F(x_k) = 0$. Правая часть (6) достигается для некоторого функционала. 2) Если для элемента $x$ существует только один функционал $F_0$, $\| F_0 \| \leqslant 1$, для которого $F_0(x) = \| x \|$ и левая часть (6) достигает минимума при $\lambda_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, то $F_0(x_k) = 0$ для всех $k = 1, 2, \ldots, n$.*

Легко видеть, что из этой теоремы вытекает следующее нужное нам следствие.

Следствие 1. *Пусть на квадрате $[a, b] \times [c, d]$ заданы линейно независимая система функций $\varphi_k(x, y) \in L_{p,q}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.*

Обозначим через $E_n(f)_{L_{p,q}}$ наилучшее приближение по норме пространства $L_{p,q}$ функции $f(x, y) \in L_{p,q}$ полиномами вида

$$P_n(x, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x, y), \tag{7}$$

где $c_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — числа. Принимая во внимание теоремы 1 и 2, можем утверждать, что

$$E_n(f)_{L_{p,q}} = \max_g \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, g(x, y)\, dxdy, \tag{6'}$$

где максимум в правой части (6′) распространен на всевозможные функции $g(x, y) \in L_{p',q'}$, $\| g(x, y) \|_{L_{p',q'}} \leqslant 1$ и такие, что $\int_a^b \int_c^d P_n(x, y)\, g(x, y)\, dxdy = 0$ для любого полинома $P_n(x, y)$ вида (7).

В частности, если $f(x, y) \in L_{p,q}$, то

$$\| f(x, y) \|_{L_{p,q}} = \max_g \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, g(x, y)\, dxdy, \tag{8}$$

где максимум в правой части (8) распространен на всевозможные функции $g(x, y) \in L_{p',q'}$, $\| g(x, y) \|_{L_{p',q'}} \leqslant 1$.

Лемма. *Если $\|f\|_{L_{p,q}} > 0$, то максимум в правой части (8) достигается для функции $g_0(x, y)$ вида*

$$g_0(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\| f \|_{L_{p,q}}^{q-1}} \left[ \displaystyle\int_a^b |f|^p\, dx \right]^{\frac{q}{p}-1} |f|^{p-1} \operatorname{sign} f, & \text{если } \displaystyle\int_a^b |f|^p dx > 0; \\ 0, & \text{если } \displaystyle\int_a^b |f|^p dx = 0. \end{cases}$$

*Функция $g_0(x, y)$ будет единственной (при $p = 1$ или $q = 1$ в предположении, что $f(x, y) \neq 0$ почти всюду на $[a, b] \times [c, d]$).*

Доказательство леммы несложно и опускается.

Пусть $f(x, y) \in L_{p,q}$ $(1 \leqslant p, q < \infty)$ и не является полиномом вида (7). Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Для того, чтобы полином*

$$P_n^*(x, y) = \sum_{k=1}^{n} c_k^* \varphi_k(x, y)$$

*был полиномом наименьшего уклонения для функции $f(x, y)$ в метрике $L_{p,q}$, достаточно и (при $p = 1$ или $q = 1$ в случае, если разность $f(x, y) - P_n^*(x, y) \neq 0$ почти всюду на $[a, b] \times [c, d]$), необходимо, чтобы для функции*

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} \left[ \displaystyle\int_a^b |f - P_n^*|^p dx \right]^{\frac{q}{p}-1} |f - P_n^*|^{p-1} \operatorname{sign}(f - P_n^*), & \\ & \text{если } \displaystyle\int_a^b |f - P_n^*|^p dx > 0; \\ 0, & \text{если } \displaystyle\int_a^b |f - P_n^*|^p dx = 0 \end{cases} \tag{9}$$

*и любого полинома $P_n(x, y)$ вида (7) имело место равенство*

$$\int_a^b \int_c^d P_n(x, y)\, \alpha(x, y)\, dxdy = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Достаточность. Предположим, что $\alpha(x, y)$ удовлетворяет указанным условиям. Легко проверить, что

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, \alpha(x, y)\, dxdy = \| f - P_n^* \|_{L_{p,q}}^q, \tag{11}$$

$$\| \alpha \|_{L_{p',q'}} = \| f - P_n^* \|_{L_{p,q}}^{q-1}. \tag{12}$$

Но из теоремы 2 следует

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y)\, \alpha(x, y)\, dxdy \leqslant E_n(f)_{L_{p,q}} \| f - P_n^* \|_{L_{p,q}}^{q-1}. \tag{13}$$

Сравнивая (12) и (13), получим, что $\| f - P_n^* \|_{L_{p,q}} \leqslant E_n(f)_{L_{p,q}}$, т. е. $P_n^*(x,y)$ — полином наилучшего уклонения для $f(x, y)$.

Необходимость. Пусть $P_n^*(x, y)$ — полином наилучшего приближения для $f(x, y)$ и $\alpha(x, y)$ — функция, построенная по формуле (9).

Положим $\alpha^*(x, y) = \dfrac{1}{E_n(f)_{L_{p,q}}} \alpha(x, y)$. Тогда выполняются следующие условия:

а) $\| \alpha^*(x, y) \|_{L_{p',q'}} = 1$;

б) $\displaystyle\int_a^b \int_c^d (f - P_n^*)\, \alpha^* dxdy = \| f - P_n^* \|_{L_{p,q}} = E_n(f)_{L_{p,q}}$.

Но тогда из второй части теоремы 2 и леммы следует, что $\alpha^*(x, y)$, а вместе с ней и $\alpha(x, y)$ обладают свойством (10). Теорема полностью доказана.

При $p = q$ получается известный критерий полинома наилучшего приближения в пространстве $L_p$ (см. [7]).

Автор глубоко благодарен В. К. Дзядыку за постановку задачи и помощь в работе.

## ЛИТЕРАТУРА


1. В. К. Дзядык, О применении линейных методов к приближению полиномами функций, являющихся решениями интегральных уравнений Фредгольма второго рода, УМЖ, т. 22, № 4, 1970.
2. В. К. Дзядык, О применении линейных методов к приближению полиномами функций, являющихся решениями интегральных уравнений Фредгольма второго рода, УМЖ, т. 22, № 5, 1970.
3. М. А. Красносельский, П. П. Забрейко, Е. И. Пустынник, П. Е. Соболевский, Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, «Наука», М., 1966.
4. А. И. Колмогоров, С. В. Фомин, Элементы теории функций и функционального анализа, «Наука», М., 1968.
5. Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, Элементы функционального анализа, «Наука», М., 1965.
6. С. М. Никольский, Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 10, № 3, 1946.
7. А. Ф. Тиман, Теория приближения функций действительного переменного, Физматгиз, М., 1960.


Поступила 24.V 1972 г.
Киевский государственный университет