

1. М. Л о э в, Теория вероятностей, ИЛ, М., 1962.
2. Б. П. Д е м и д о в и ч, Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», М., 1967.
3. В. М. А л е к с е е в, Исследование некоторых систем линейных дифференциальных уравнений со случайными параметрами, Автореферат канд. дисс., К., 1970.
4. Ю. А. Р о з а н о в, Стационарные случайные процессы, Физматгиз, М., 1963.
5. И. З. Ш т о к а л о, Операционные методы и их развитие в теории линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, Изд-во АН УССР, К., 1961.
6. В. Г. К о л о м и е ц, Д. Г. К о р е н е в с к и й, Об устойчивости линейных систем со случайными возмущениями, Прикладная механика, т. 3, № 8, 1967.
7. И. И. Г н х м а н, А. В. С к о р о х о д, Введение в теорию случайных процессов, «Наука», М., 1965.

Поступила 3.III 1971 г.,  
после переработки — 22.VIII 1972 г.  
Киевский институт инженеров гражданской авиации

УДК 531.352.396

## О движении вокруг центра масс свободного твердого тела, стабилизируемого вращением относительно неглавной оси инерции

В. А. Г р о б о в, Д. В. Л е б е д е в

Для обеспечения ориентации одной из осей свободного твердого тела в инерциальном пространстве в ряде случаев применяются системы стабилизации, основанные на использовании гироскопических свойств вращающихся тел [1—3]. Известно, что стационарное вращение свободного тела относительно главных осей, соответствующих максимальному и минимальному моментам инерции, устойчиво [4, 5]. При наличии диссипации энергии устойчивым остается только вращение вокруг оси с наибольшим моментом инерции [2, 3].

В данной статье методами теории возмущений исследуется влияние параметров эллипсоида инерции на вращательное движение несимметричного твердого тела вокруг неглавной оси, соответствующей максимальному моменту инерции.

Введем ортогональный трехгранник  $Oxyz$ , жестко связанный с телом, оси которого не совпадают с главными осями инерции.

Предполагается, что система управления сообщает твердому телу требуемую угловую скорость вращения вокруг оси  $Oy$ , после чего оно совершает движение по инерции.

Уравнения движения свободного твердого тела относительно центра масс в проекциях на связанные с ним координатные оси  $Oxyz$  записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_x &= \alpha_{11}\omega_x\omega_y + \alpha_{13}\omega_y\omega_z + \alpha_{15}\omega_y^2 + \mu F_1(\omega_x, \omega_y, \omega_z), \\ \dot{\omega}_y &= \mu F_2(\omega_x, \omega_y, \omega_z), \\ \dot{\omega}_z &= \alpha_{31}\omega_x\omega_y + \alpha_{33}\omega_y\omega_z + \alpha_{35}\omega_y^2 + \mu F_3(\omega_x, \omega_y, \omega_z), \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} \mu F_1(\omega_x, \omega_y, \omega_z) &= (a_{11} - \alpha_{11})\omega_x\omega_y + a_{12}\omega_x\omega_z + (a_{13} - \alpha_{13})\omega_y\omega_z + a_{14}\omega_x^2 + \\ &+ (a_{15} - \alpha_{15})\omega_y^2 + a_{16}\omega_z^2, \end{aligned}$$

$$\mu F_2(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = a_{21}\omega_x\omega_y + a_{22}\omega_x\omega_z + a_{23}\omega_y\omega_z + a_{24}\omega_x^2 + a_{25}\omega_y^2 + a_{26}\omega_z^2,$$

$$\mu F_3(\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (a_{31} - \alpha_{31})\omega_x\omega_y + a_{32}\omega_x\omega_z + (a_{33} - \alpha_{33})\omega_y\omega_z + a_{34}\omega_x^2 + (a_{35} - \alpha_{35})\omega_y^2 + a_{36}\omega_z^2,$$

$\mu$  — малый параметр. Коэффициенты  $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{35}$  находятся по формулам

$$\begin{aligned} \alpha_{11} = -\alpha_{33} &= \frac{I_{xz}(I_x - I_y + I_z)}{I_x I_z - I_{xz}^2}, & \alpha_{13} &= \frac{I_z(I_y - I_z) - I_{xz}^2}{I_x I_z - I_{xz}^2}, \\ \alpha_{15} &= \frac{I_z I_{yz} - I_{xz} I_{xy}}{I_x I_z - I_{xz}^2}, & \alpha_{31} &= -\frac{I_x(I_y - I_x) - I_{xz}^2}{I_x I_z - I_{xz}^2}, \\ \alpha_{35} &= -\frac{I_x I_{xy} - I_{yz} I_{xz}}{I_x I_z - I_{xz}^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Матрица  $A$  коэффициентов  $a_{ij}$  ( $i = 1, 2, 3; j = 1, 2, \dots, 6$ ) определяется из соотношения

$$A = I^{-1}QS, \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} I &= I_x I_y I_z - I_x I_{yz}^2 - I_y I_{xz}^2 - I_z I_{xy}^2 - 2I_{xy} I_{xz} I_{yz}, \\ Q &= \begin{vmatrix} I_y I_z - I_{yz}^2 & I_z I_{xy} + I_{xz} I_{yz} & I_y I_{xz} + I_{xy} I_{yz} \\ I_z I_{xy} + I_{xz} I_{yz} & I_x I_z - I_{xz}^2 & I_x I_{yz} + I_{xy} I_{xz} \\ I_y I_{xz} + I_{xy} I_{yz} & I_x I_{yz} + I_{xy} I_{xz} & I_x I_y - I_{xy}^2 \end{vmatrix}, \\ S &= \begin{vmatrix} I_{xz} & -I_{xy} & I_y - I_z & 0 & I_{yz} & -I_{yz} \\ -I_{yz} & I_z - I_x & I_{xy} & -I_{xz} & 0 & I_{xz} \\ I_x - I_y & I_{yz} & -I_{xz} & I_{xy} & -I_{xy} & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

В форме (1) могут быть записаны, например, уравнения движения тела, эллипсоид инерции которого удовлетворяет следующим условиям:

а) между моментами инерции тела  $I_x, I_y$  и  $I_z$  имеют место соотношения  $I_y \approx I_z \gg I_x, I_y > I_z$ ;

б) оси связанной с телом системы координат  $Oxyz$  составляют с соответствующими главными осями малые углы.

При  $\mu = 0$  система уравнений (1) имеет решение

$$\begin{aligned} \omega_x = \alpha\Omega + N \sin(kt + \varphi), \quad \omega_y = \Omega, \quad \omega_z = \beta\Omega + \sigma_1 N \sin(kt + \varphi) + \\ + \sigma_2 N \cos(kt + \varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $N, \Omega, \varphi$  — произвольные постоянные интегрирования,

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{I_{xz} I_{yz} - I_{xy}(I_y - I_z)}{(I_y - I_x)(I_y - I_z) - I_{xz}^2}, & \beta &= \frac{I_{xz} I_{xy} - I_{yz}(I_y - I_x)}{(I_y - I_x)(I_y - I_z) - I_{xz}^2}, \\ k &= \Omega \sqrt{-\alpha_{11}^2 - \alpha_{13} \alpha_{31}}, & \sigma_1 &= \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{13}}; & \sigma_2 &= \frac{k}{\Omega \alpha_{13}}. \end{aligned} \quad (5)$$

Решение системы (1) при  $\mu \neq 0$  будем по-прежнему искать в виде (4), считая  $N$ ,  $\Omega$  и  $\varphi$  функциями времени.

Преобразуя согласно методу медленно меняющихся коэффициентов исходную систему уравнений (1) к переменным  $N$ ,  $\Omega$  и  $\varphi$ , получим для  $N$  и  $\Omega$  следующие уравнения:

$$\dot{N} = \mu F_1^* \left( \sin \xi - \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \cos \xi \right) + \mu F_2^* \left( \frac{\alpha \sigma_1 - \beta}{\sigma_2} \cos \xi - \alpha \sin \xi \right) + \mu F_3^* \frac{\cos \xi}{\sigma_2}, \quad (6)$$

$$\dot{\Omega} = \mu F_2^*,$$

где

$$\begin{aligned} \xi &= kt + \psi, \\ MF_1^* &= \mu F_1(\alpha \Omega + N \sin \xi, \Omega, \beta \Omega + \sigma_1 N \sin \xi + \sigma_2 N \cos \xi), \\ \mu F_2^* &= \mu F_2(\alpha \Omega + N \sin \xi, \Omega, \beta \Omega + \sigma_1 N \sin \xi + \sigma_2 N \cos \xi), \\ \mu F_3^* &= \mu F_3(\alpha \Omega + N \sin \xi, \Omega, \beta \Omega + \sigma_1 N \sin \xi + \sigma_2 N \cos \xi). \end{aligned}$$

Усредняя правые части уравнений (6) за период  $\frac{2\pi}{k}$  и учитывая соотношения

$$a_{11} + a_{33} - 2a_{25} = 0, \quad a_{12} + a_{23} + 2a_{36} = 0, \quad a_{21} + a_{32} + 2a_{14} = 0$$

между коэффициентами матрицы  $A$ , получим уравнения первого приближения для определения  $N$  и  $\Omega$

$$\frac{dN}{dt} = -\mu a \Omega N, \quad \frac{d\Omega}{dt} = \mu (a \Omega^2 + b N^2). \quad (7)$$

В уравнениях (7) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a &= a_{21}\alpha + a_{22}\alpha\beta + a_{33}\beta + a_{24}\alpha^2 + a_{25} + a_{26}\beta^2, \\ 2b &= \sigma_1 a_{22} + a_{24} + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) a_{26}. \end{aligned} \quad (8)$$

Вводя параметр  $\lambda$ , определяемый равенством

$$\lambda = I_{xy} I_{yz} (I_z - I_x) - I_{xz} (I_{xy}^2 - I_{yz}^2), \quad (9)$$

исследуем зависимость коэффициентов  $a$  и  $b$  уравнений (7) от  $\lambda$ . Из выражений (2), (3), (5), (8) следует, что

- 1) при  $\lambda = 0$  коэффициенты  $a$  и  $b$  обращаются в нуль;
- 2) при  $\lambda \neq 0$  знаки коэффициентов  $a$  и  $b$  совпадают и противоположны знаку  $\lambda$ .

В случае, когда параметры эллипсоида инерции таковы, что  $\lambda = 0$ , уравнения (7) имеют решение:  $N = N(t_0) = N_0$ ,  $\Omega = \Omega(t_0) = \Omega_0$ . Изменение угловых скоростей  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  во времени при этом описывается соотношениями (4).

Для исследования поведения интегральных кривых на плоскости  $N \Omega$  при  $\lambda \neq 0$  воспользуемся первым интегралом системы (7).

$$2a\Omega^2 N^2 + bN^4 = H. \quad (10)$$

Качественная картина плоскости  $N \Omega$  ( $\Omega > 0$ ,  $N > 0$ ) зависит от знака  $\lambda$  и представлена на рис. 1 и 2 при  $\lambda < 0$  и  $\lambda > 0$  соответственно. Пунктиром изображены графики функций  $\Omega_0 = \Omega_0(N)$ , связывающих между собой начальные значения переменных  $N$  и  $\Omega$ .

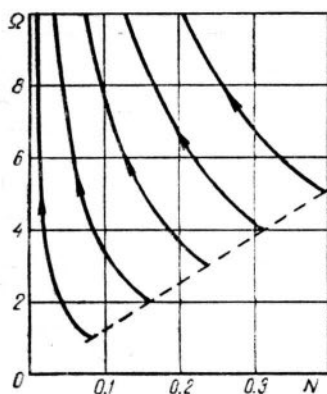


Рис. 1.

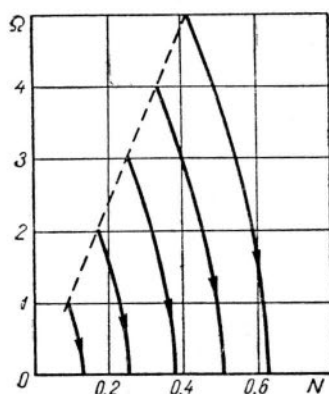


Рис. 2.

Характер интегральных кривых позволяет сделать вывод о том, что в зависимости от параметров эллипсоида инерции угловая скорость вращения свободного твердого тела вокруг оси  $Oy$  может либо возрастать, либо убывать. Следует отметить, что угловая скорость  $\omega_y$  является эллиптической функцией времени  $t$ . Действительно, используя первый интеграл (10), приходим к уравнению  $\frac{d\Omega}{dt} = \pm \mu \sqrt{\Omega^4 + bH}$ , причем верхний знак соответствует случаю, когда  $\lambda < 0$ , нижний — когда  $\lambda > 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Л. Гродзовский и др., Механика космического полета, Механика в СССР за 50 лет, т. I, «Наука», М., 1968.
2. W. T. Thomson and G. S. Reiter, Attitude Drift of Space Vehicles, Journal of Astronautical Sciences, 7, 1960.
3. H. L. Newkirk, W. R. Haseltin, Stability of Rotating Space Vehicles, Proceeding, of the IRE, Apr., 1960.
4. Дж. Л. Синг, Классическая динамика, Физматгиз, М., 1963.
5. Н. Г. Четаев, Устойчивость движения, Гостехиздат, М., 1955.

Поступила 8.II 1972 г.  
КВИАВУ

УДК 517.512.6

### Приближение в среднем функций классов $W^r H[\omega]_L$ суммами Фурье

А. Г. Демченко

В данной работе установлено асимптотическое равенство для величины

$$\mathcal{E}(W^r H[\omega]_L; S_n)_L = \sup_{f \in W^r H[\omega]_L} \|f(x) - S_n(f; x)\|_L,$$