УДК 517.95:32

Об одной нестационарной задаче со свободной поверхностью

Б. В. Базалий

1. Пусть Γ — единичная окружность на плоскости $z = x + iy$. Требуется определить двусвязную область $G_z(t)$, изменяющуюся во времени, ограниченную кривой Γ и некоторой неизвестной простой замкнутой кривой $\gamma(t)$, так, чтобы выполнялись условия:

1) внутри $G_z(t)$ существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x, y, t)$, удовлетворяющая уравнению $\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0$, и непрерывная вплоть до границ вместе со своими производными;

2) на Γ выполняются условия обтекания: $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = 0$;

3) на неизвестной границе $\gamma(t)$ имеет место интеграл Коши:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}|\nabla\varphi|^2 - q(x, y, t) = 0,$$

где $q(x, y, t)$ — заданная аналитическая функция своих аргументов;

4) пусть $F(x, y, t)$ определяет искомую линию $\gamma(t)$. Тогда должно выполняться условие

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0,$$

так называемое кинематическое условие на свободной границе;

5) в начальный момент времени $t = 0$ заданы значения потенциала $\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y)$ и кривая $\gamma(0) = \gamma_0$.

Как известно, в каждый момент времени кольцо $G_z(t)$ можно конформно отобразить на круговое кольцо в некоторой плоскости τ, и это отображение определено единственным образом, если задать, например, соответствие точек $z = 1$ и $\tau = 1$. Таким образом, возникает отображающая функция $\tau(z, t)$. Пусть $z(\tau, t)$ — обратная к ней функция, которая отображает круговое кольцо $G_{\rho(t)}$, $\rho(t) \leqslant |\tau| \leqslant 1$, на область $G_z(t)$. Функция $\rho(t)$ — конформний радиус области $G_z(t)$ — должна находиться в процессе решения задачи.

Пусть начальная кривая γ_0 такова, что начало координат в плоскости z расположено вне области $G_z(0)$. Будем искать функцию $z(\tau, t)$ в виде $z(\tau, t) = \tau e^{F(\tau, t)}$, где $F(\tau, t)$ — однозначная аналитическая по τ при каждом t функция с той же областью определения, что и у функции $z(\tau, t)$.

Вместе с потенциалом $\varphi(x, y, t)$ рассмотрим гармонически сопряженную ему функцию тока $\psi(x, y, t)$ и построим аналитическую функцию $\chi(z, t) = \varphi + i\psi$, вообще говоря, неоднозначную. Под $X(\tau, t)$ будем понимать результат суперпозиции $X(z(\tau, t), t)$. В терминах аналитических функций $F(\tau, t)$ и $X(\tau, t)$ исходную задачу можно переформулировать следующим образом.

Внутри кольца $G_{\varrho(t)}$ требуется определить аналитические функции $F(\tau, t)$ и $X(\tau, t)$ и вещественную функцию $\rho(t)$ по следующим условиям:

$$\operatorname{Re}\overline{\left(-1+i\frac{\partial F^+}{\partial\sigma}\right)}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^+ = -\rho^{-2}e^{-2\operatorname{Re}F^+}\operatorname{Im}\frac{\partial X^+}{\partial\sigma} + $$

$$+\frac{\rho'}{\rho}\left|-1+i\frac{\partial F^+}{\partial\sigma}\right|^2 \text{ на } |\tau| = \rho(t), \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)^+ - \operatorname{Re}\frac{\partial X^+}{\partial\sigma}\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^+}{i+\frac{\partial F^+}{\partial\sigma}} + \frac{1}{2}\left|\frac{\partial X^+}{\partial\sigma}\right|^2\frac{\rho^{-2}e^{-2\operatorname{Re}F^+}}{\left|i+\frac{\partial F^+}{\partial\sigma}\right|^2} -$$

$$-q(\operatorname{Re}\rho e^{i\sigma+F^+}, \operatorname{Im}\rho e^{i\sigma+F^+}, t) \text{ на } |\tau| = \rho(t), \tag{2}$$

$$\operatorname{Re}F^+ = 0,\ F(1, t) = 0 \text{ на } |\tau| = 1, \tag{3}$$

$$\operatorname{Im}X^+ = 0 \text{ на } |\tau| = 1, \tag{4}$$

где F^+, например, означает предельное значение функции $F(\tau, t)$ на границе области $G_{\varrho(t)}$. Функцию $X(\tau, t)$ можно представить в виде

$$X(\tau, t) = X_0(\tau, t) + ia_0 \ln\tau, \tag{5}$$

где $X_0(\tau, t)$ — однозначная аналитическая функция в $G_{\varrho(t)}$, а коэффициент a_0 — постоянная величина, определяемая через начальные условия. Постоянство a_0 следует из известной в гидродинамике теоремы Томпсона. Подставляя (5) в (1) — (4), получим условия для определения однозначных аналитических в $G_{\varrho(t)}$ функций $F(\tau, t)$ и $X_0(\tau, t)$, которые при $t = 0$ принимают значения $F(\tau, 0)$, $X_0(\tau, 0)$.

2. Рассмотрим две такие краевые задачи:

$$\operatorname{Re}F^+(\rho(t)e^{i\sigma}, t) = \mu(\sigma, t),\quad \operatorname{Re}F^+(e^{i\sigma}, t) = 0,\quad F^+(1, t) = 0, \tag{6}$$

и

$$\operatorname{Re}X_0^+(\rho(t)e^{i\sigma}, t) = \lambda(\sigma, t),\quad \operatorname{Im}X_0^+(e^{i\sigma}, t) = 0 \tag{7}$$

для однозначных аналитических по τ при каждом t функций $F(\tau, t)$ и $X_0(\tau, t)$, предполагая, что $\mu(\sigma, t)$ и $\lambda(\sigma, t)$ — заданные достаточно гладкие по обоим аргументам функции, 2π-периодические по σ. Решение задачи Дирихле (6) и смешанной задачи (7) в кольце $G_{\varrho(t)}$ можно представить в виде:

$$F(\tau, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mu(s, t)L_0(\tau, \rho, s)\,ds + iC \tag{8}$$

и

$$X_0(\tau, t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\lambda(s, t)L_{\pi/2}(\tau, \rho, s)\,ds \tag{9}$$

соответственно, где $L_0(\tau, \rho, s)$, $L_{\pi/2}(\tau, \rho, s)$ — вполне определенные ядра, C — вещественная постоянная, которую можно определить из условия нормировки

$$C = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\mu(s, t)L_0(1, \rho, s)\,ds. \tag{10}$$

При этом функция $X_0(\tau, t)$ однозначна, а необходимое и достаточное условие однозначности функции $F(\tau, t)$ содержится в равенстве

$$\int_0^{2\pi} \mu(s, t)\, ds = 0. \tag{11}$$

Введем обозначения

$$S_\varkappa(u, \rho) = -\frac{\operatorname{ctg}\varkappa}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(s)\, ds + Su + R(u, \rho, \varkappa),$$

$$S_0(u, \rho) = Su + R(u, \rho, 0), \quad S_{\pi/2}(u, \rho) = Su + R(u, \rho, \pi/2),$$

$$R(u, \rho, \varkappa) = -\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} u(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^{2k}}{1 - 2\rho^{2k}\cos 2\varkappa + \rho^{4k}}[\sin k(\sigma - s)(\cos 2\varkappa -$$

$$- \rho^{2k}) - \cos k(\sigma - s)\sin 2\varkappa]\, ds,$$

$$Su = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(s)\operatorname{ctg}\frac{s - \sigma}{2}\, ds,$$

тогда $F(\rho(t)e^{i\sigma}, t) = \mu(\sigma, t) + iS_0(\mu, \rho) + iC, \quad X_0(\rho(t)e^{i\sigma}, t) = \lambda(\sigma, t) + iS_{\pi/2}(\lambda, \rho)$.

Если к условию (1) добавить следующее из (3) условие:

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)^+ = 0 \text{ на } |\tau| = 1, \tag{12}$$

то для определения аналитической по τ функции $F_t(\tau, t)$ в кольце $G_{\varrho(t)}$ также получим задачу Гильберта. Вследствие сделанных предположений эта задача имеет нулевой индекс для достаточно малых значений t. Задачу (1), (12) можно решить, как обычно, последовательно решая две задачи Дирихле в той же области. Если затем воспользоваться формулами Сохоцкого, то для предельных значений искомой функции на границе получим следующее выражение:

$$F_t(\rho(t)e^{i\sigma}, t) = e^{if - S_0(f, \varrho)}[p + iS_{\varkappa(f)}(p, \rho)], \tag{13}$$

где

$$f = -\operatorname{arc\,tg}\frac{\mu_\sigma}{1 + S_0(\mu_\sigma, \rho)}, \; f_1 = e^{S_0(f, \varrho)}[\mu_\sigma^2 + (1 + S_0(\mu_\sigma, \rho))^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$f_2 = -\rho^{-2}e^{-2\mu}f_1^{-1}S_{\pi/2}(\lambda_\sigma, \rho)\, e^{2S_0(f, \varrho)},$$

$$\varkappa(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\, ds, \; p = f_2 + \frac{\rho'}{\rho} f_1.$$

Отсюда следует, что

$$\mu_t = e^{-S_0(f, \varrho)}(f_2\cos f - S_{\varkappa(f)}(f_2, \rho)\sin f) - \frac{\rho'}{\rho}(1 + e^{-S_0(f, \varrho)}S_{\varkappa(f)}(f_1, \rho)\sin f). \tag{14}$$

Из условия (2) имеем

$$\lambda_t = -\frac{(\lambda_\sigma - a_0)\, S_{\varkappa(f)}(f_2, \rho)}{f_1} + \frac{1}{2}\frac{(S_{\pi/2}(\lambda_\sigma, \rho))^2 - (\lambda_\sigma - a_0)^2}{\rho^2 e^{2\mu} f_1} e^{-S_0(f, \varrho)} +$$

$$+ q(\operatorname{Re}\rho(t)\, e^{i\sigma+\mu+iS_0(\mu,\varrho)+iC},\ \operatorname{Im}\rho(t)\, e^{i\sigma+\mu+iS_0(\mu,\varrho)+iC},\ t) +$$

$$+ \frac{\rho'}{\rho}\left(S_{\pi/2}(\lambda_\sigma,\ \rho) - \frac{\lambda_\sigma - a_0}{f_1} S_{\varkappa(f)}(f_1,\ \rho)\right). \tag{15}$$

И, наконец, условие (11) позволяет найти величину ρ':

$$\rho' = \rho \frac{\int\limits_0^{2\pi} e^{-S_0(f,\varrho)} (f_2 \cos f - S_{\varkappa(f)}(f_2,\ \rho) \sin f)\, ds}{\int\limits_0^{2\pi} (1 + e^{-S_0(f,\varrho)} S_{\varkappa(f)}(f_1,\ \rho) \sin f)\, ds}. \tag{16}$$

Таким образом, исходная задача эквивалентна задаче определения функций $\mu(\sigma,\ t)$, $\lambda(\sigma,\ t)$, $\rho(t)$, удовлетворяющих интегро-дифференциальным уравнениям (14) — (16) и начальным условиям

$$\mu(\sigma, 0) = \mu_0(\sigma), \quad \lambda(\sigma, 0) = \lambda_0(\sigma), \quad \rho(0) = \rho_0. \tag{17}$$

Заметим, что после исключения величины ρ' из правых частей (14) и (15) получаем «нормальную» форму задачи Коши.

3. Воспользуемся заменой

$$\mu(\sigma,\ t) = \bar{\mu}(\sigma,\ t) + \mu_0(\sigma), \quad \lambda(\sigma,\ t) = \bar{\lambda}(\sigma,\ t) + \lambda_0(\sigma), \quad \rho(t) = \bar{\rho}(t) + \rho_0,$$

и для функций $\bar{\mu}(\sigma,\ t)$, $\bar{\lambda}(\sigma,\ t)$, $\bar{\rho}(t)$ получим задачу Коши с нулевыми начальными условиями. Предположим, что функции $\mu_0(\sigma)$, $\lambda_0(\sigma)$ — аналитические и 2π-периодические, $0 < \rho_0 < 1$, и начальная точка $(\mu_0,\ \lambda_0,\ \rho_0)$ такова, что

$$\mu_{0\sigma}^2 + (1 + S_0(\mu_{0\sigma},\ \rho_0))^2 \neq 0,$$

$$\int\limits_0^{2\pi} (1 + e^{-S_0(f_0,\varrho_0)} S_{\varkappa(f_0)}(f_{10},\ \rho_0) \sin f_0)\, ds \neq 0, \tag{18}$$

$$\varkappa(f_0) \neq 0,$$

где $f_0 = -\operatorname{arctg} \dfrac{\mu_{0\sigma}}{1 + S_0(\mu_{0\sigma},\ \rho_0)}$, $f_{10} = e^{S_0(f_0,\varrho_0)} [\mu_{0\sigma}^2 + (1 + S_0(\mu_{0\sigma},\ \rho_0))^2]^{\frac{1}{2}}$.

В этом случае решение задачи Коши ищется в виде

$$\bar{\mu}(\sigma,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mu^{(n)}(\sigma), \quad \bar{\lambda}(\sigma,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \lambda^{(n)}(\sigma), \quad \bar{\rho}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \rho^{(n)}. \tag{19}$$

При выполнении условий (18), разлагая в ряды по t правые части уравнений, получим рекуррентные соотношения, однозначно определяющие величину $U^{(n)} = (\mu^{(n)},\ \lambda^{(n)},\ \rho^{(n)})$, $U^{(0)} = (0,\ 0,\ 0)$, $U^{(n)} = U^{(n)}(U^{(0)},\ \ldots,\ U^{(n-1)})$, причем $\lambda^{(n)}$, $\mu^{(n)}$ — аналитические и 2π-периодические функции. Для доказательства сходимости рядов (19) вводятся формальные нормы

$$\| u \|_{r,\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \left\| \frac{\partial^n u}{\partial \sigma^n} \right\|_\alpha, \tag{20}$$

где под $\|\cdot\|_\alpha$ понимается норма функции в пространстве непрерывных по Гельдеру функций с показателем $0 < \alpha < 1$, определенных на $(0,\ 2\pi)$ и 2π-периодических, и строятся аналитические мажоранты аналогично тому, как это делается в [1]. Существенным фактом при этом является возможность оценки $\| Su_\sigma\|_{r,a} \ll C(\alpha) \dfrac{\partial}{\partial r}\|u\|_{r,\alpha}$, которая следует из оценки сингулярного оператора с ядром Гильберта и свойств формальной нормы (20) [2].

Теорема. *Пусть начальные условия* $(\mu_0(\sigma), \lambda_0(\sigma), \rho_0)$ *удовлетворяют условиям* (18) *и функции* $\mu_0(\sigma)$, $\lambda_0(\sigma)$ — *аналитические и* 2π-*периодические, тогда в некоторой окрестности точки* $t = 0$ *существует единственное аналитическое решение задачи Коши для данной системы.*

Если по найденной функции $\mu(\sigma, t)$ *построить функцию* $z = \tau e^{F(\tau, t)}$, *то функция* $z^+(\rho(t) e^{i\sigma}, t) = x(\sigma, t) + iy(\sigma, t)$ *определит параметрическое описание свободной границы* $\gamma(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. Leray et Y. Ohya, Equations et systemes non-lineaires Hyperboliques Non-Stricts, Math. Ann., Band 170, Heft 3, 1967.
2. А. Б. Шабат, Задача Коши для псевдодифференциального уравнения, Сборник работ теор. отдела Института гидродинамики СО АН СССР, Новосибирск, 1967.

Поступила 19.X 1971 г.

Институт прикладной математики и механики АН УССР

УДК 518:517.91/94

Интегрирование некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений на основе приближения непрерывных функций линейными функциями

И. И. Безвершенко

Известный метод С. А. Чаплыгина [1] интегрирования дифференциальных уравнений мало используется на практике даже для уравнений первого порядка $y' = f(x, y)$ из-за сложности квадратур, получаемых в процессе построения аппроксимирующих искомое решение последовательностей нижних и верхних функций [2].

Исходя из начальной пары чаплыгинских приближений, в статье разрабатывается вариант метода квазилинеаризации (см., например, [3—5]) при построении приближенного решения обыкновенного дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x, y)$ [6], основанный на равномерном приближении нелинейных функций $f(x, y)$ функциями более простого вида. Приводится оценка погрешности и скорости сходимости рассматриваемого процесса. Приемлемый в инженерной практике результат получается уже на первом шаге.

1° Некоторые результаты из теории приближения. Если на промежутке $[a, b]$ задана непрерывная функция $\varphi(x)$, обладающая знакопостоянной производной $\varphi''(x)$, то при равномерном приближении ее полиномами первой степени (прямыми) ее полиномом наилучшего приближения, как известно (см., например, [7]), является чебышевская секущая с уравнением

$$P_1(x) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} x + \frac{\varphi(a) + \varphi(\xi)}{2} - \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a} \frac{a + \xi}{2}.$$

При этом наилучшее равномерное приближение

$$E(\varphi) = \inf_{l \in Q} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi(x) - l(x)| = \frac{1}{2} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi(x) - \bar{l}(x)| =$$

$$= \frac{1}{2} |\varphi(\xi) - \bar{l}(\xi)| = |\varphi(\xi) - P_1(\xi)|,$$