УДК 62—50

Выпуклая аппроксимация управляемого процесса и метод построения обобщенных оптимальных режимов

И. В. Бейко, М. Ф. Бейко

Численные методы теории оптимальных управлений получили глубокое развитие и в направлении использования принципа максимума Понтрягина (градиентные методы, методы Ньютона [1, 2] и др.) и в направлении практического развития идей динамического программирования (методы локальных вариаций [3] и др.). Эти общие направления имеют свои положительные стороны и свои области эффективного применения. В данной работе предпринята попытка объединить положительные стороны обоих направлений в одном общем методе, основанном на замене исходного управляемого процесса его «выпуклой аппроксимацией» (некоторым частично дискретным аналогом процесса овыпукления Гамкрелидзе) и пригодном для численного построения обобщенных оптимальных режимов при разных фазовых ограничениях.

Будем рассматривать управляемый процесс $x(\cdot) \in M$, где множество M допустимых траекторий $x(\cdot)$ определяется условиями

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \text{ для } t \in T, \ u(t) \in \Omega(t, x(t)), \ \varphi_i(x(\cdot)) \leqslant 0, \ i = \overline{0, s}, \quad (1)$$

при заданных $f: X \times U \times R \to X$, $\varphi: C(X) \to E^s$, $\Omega: R \times X \to 2^U$, $t \in T$.

Допустимую траекторию $x^0(\cdot)$, доставляющую максимальное значение функционалу $\varphi_0(x(\cdot))$, т. е.

$$x^0(\cdot) = \arg \max_{x(\cdot) \in M} \varphi_0(x(\cdot)), \quad (2)$$

называют решением (оптимальной траекторией) задачи оптимального управления (1), (2).

Очевидно, множество M не всегда замкнуто и поэтому задача (1), (2) может не иметь решения. В таком случае естественно построить замыкание $\overline{M}$ множества M в некотором подходящем нормированном пространстве X с нормой $|x(\cdot)|$ и искать обобщенное решение задачи (1), (2) как функцию $\tilde{x}(\cdot) \in X$, для которой при любом $\varepsilon > 0$ найдется функция $x_\varepsilon \in M$, удовлетворяющая неравенствам

$$|\tilde{x} - x_\varepsilon| < \varepsilon, \tag{3}$$

$$\varphi_0(x_\varepsilon) > \sup_{x \in M} \varphi_0(x) - \varepsilon. \tag{4}$$

Ниже предлагается способ построения обобщенного решения, основанный на замене процесса (1) его *выпуклой δ-аппроксимацией.*

Определение. Множество $X(\delta, \Omega)$, элементами которого являются непрерывные по t функции $x(t)$, называется выпуклой δ-аппроксимацией процесса (1), (2), если задана последовательность моментов времени $\delta = \{\ldots, \tau_{i-1}, \tau_i, \tau_{i+1}, \ldots\}$ и

$$\forall i,\ t \in [\tau_i, \tau_{i+1})\ \exists\ u(t) \in \Omega(\tau_i, x(\tau_i)): \dot{x}(t) = f(x(\tau_i), u(t), \tau_i). \tag{5}$$

Задачу оптимизации процесса (5) будем называть δ-задачей.

Пусть $F(t, x)$ есть множество $\{z \mid z = f(x, u, t),\ u \in \Omega(t, x)\}$, а $[F(t, x)]$ — его выпуклая оболочка.

Лемма 1. *Если последовательность $\{\tau_i\}$ ограничена, $F(\tau_i, x(\tau_i))$—компакт при всех τ_i, φ_0 ограничена сверху и φ_i $(i = \overline{0, s})$ непрерывна на $X(\delta, \Omega)$, то δ-задача имеет решение.*

Действительно, компактность всех $F(\tau_i, x(\tau_i))$ и ограниченность $\{\tau_i\}$ обеспечивают компактность $X(\delta, \Omega)$. Но тогда компактом будет и пересечение $X(\delta, \Omega) \cap \{z \mid \varphi_i(z) \leqslant 0,\ i = \overline{0, s}\}$ (в силу непрерывности φ_i), на котором непрерывный функционал φ_0 достигнет своего максимума.

Воспользуемся следующим свойством выпуклой δ-аппроксимации.

Теорема. *Если выполнены условия леммы 1, $\operatorname{mes}[T] < \infty$, $X_1(\delta, \Omega)$ состоит из непрерывных функций $x(\cdot)$, удовлетворяющих условиям*

$$\forall t \in [t_i, t_{i+1})\ \dot{x}(t) = \text{const},\ \dot{x}(t) \in [F(\tau_i, x(\tau_i))], \tag{6}$$

то

$$X_1(\delta, \Omega) = X(\delta, \Omega). \tag{7}$$

Доказательство. Покажем сперва, что

$$X_1(\delta, \Omega) \subset X(\delta, \Omega). \tag{8}$$

Очевидно (8) справедливо, если для любых $x \in X_1(\delta, \Omega)$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое $x_\varepsilon \in X(\delta, \Omega)$, что

$$\max_{t \in T} \| x(t) - x_\varepsilon(t) \| \leqslant C\varepsilon\ (C < \infty). \tag{9}$$

Но поскольку $[F(\tau_i, x(\tau_i))]$ — выпуклая оболочка компактного множества $F(\tau_i, x(\tau_i))$, то для любых $\dot{x}(t) \in [F(\tau_i, x(\tau_i))]$, $\varepsilon > 0$ найдутся такие числа α_j $(\alpha_j \geqslant 0,\ \Sigma_{j=1}^{N(i,\varepsilon)} \alpha_j = 1)$ и элементы $c_j \in F(\tau_i, x(\tau_i))$, что

$$\| \Sigma_{j=1}^{N(i,\varepsilon)} \alpha_j c_j - \dot{x}(t) \| \leqslant \varepsilon,\ N(i, \varepsilon) < \infty. \tag{10}$$

Поэтому, разбив интервал $[\delta_i, \delta_{i+1}]$ на $N(i, \varepsilon)$ частей $[t_s, t_{s+1}]$ $(s = \overline{0, N(i, \varepsilon)}$, $t_0 = \delta_i$, $t_s = \Sigma_{k=1}^{s} \alpha_s)$ и положив $x_\varepsilon(t_s) = x_\varepsilon(t_{s-1})$ $\forall t \in [t_s, t_{s+1})\ \dot{x}_\varepsilon(t) = c_s$ получим неравенство

$$\forall t \in [\delta_i, \delta_{i+1})\ \| x_\varepsilon(t) - x(t) \| \leqslant \| x_\varepsilon(\delta_i) - x(\delta_i) \| + \varepsilon(\delta_{i+1} - \delta_i), \tag{11}$$

которое дает неравенство (9) с константой $C = \mathrm{mes}\,[T] < \infty$ (если выбрать $x_\varepsilon(t_0) = x(t_0)$, $t_0 = \inf T$), и тем самым (8) доказано.

Пусть теперь $x \in X(\delta, \Omega)$, т. е. при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ $\dot{x}(t) \in F(\tau_i, x(\tau_i))$. Если обозначить

$$\mu(z) \overset{\Delta}{=} \mathrm{mes}\,\{t \mid \dot{x}(t) = z, t \in [\tau_i, \tau_{i+1})\},$$

то, очевидно, вектор $c_i = \int_{F(\tau_i,\ x(\tau_i))} \mu(z)\,dz$ принадлежит оболочке $[F(\tau_i, x(\tau_i))]$ и если выбрать $x_\varepsilon(\cdot) \in X_1(\delta, \Omega)$ по правилу $x_\varepsilon(t_0) = x(t_0)$, $\forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$ $\dot{x}_\varepsilon(t) = c_i$, то получим $x(t) = x_\varepsilon(t)$ для всех $t \in T$, т. е. $x(\cdot) \in X_1(\delta, \Omega)$ и тем самым доказано включение $X(\delta, \Omega) \subset X_1(\delta, \Omega)$, которое вместе с (8) доказывает теорему.

Следствие. *Если существует такая последовательность разбиений* $\delta^s = \{\delta_i^s\}$, *что* $\bigcup_i [\delta_i^s, \delta_{i+1}^s) = [T]$ *и множество* $X(\delta^s, \Omega)$ *является* ε*-сетью* ($\varepsilon \to 0$ *при* $s \to 0$) *для множества* $\{x(\cdot) \mid \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), u(t) \in \Omega(t, x(t))\}$, *то обобщенное решение* $\tilde{x}$ *задачи* (1), (2) *является оптимальным решением для системы* $\dot{x}(t) \in [F(t, x(t))]$ *при тех же* φ_i.

Пусть процесс (1), (2) удовлетворяет условию: а) существует такая непрерывная функция $\rho(z)$, $z \in R$, $\lim\limits_{z \to 0} \rho(z) = 0$, что для любого разбиения δ множество $X(\delta, \Omega)$ является ε-сетью (при $\varepsilon = \rho(|\delta|)$, $|\delta| = \sup\limits_i |\tau_i - \tau_{i+1}|$) множества

$$\{x(\cdot) \mid \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), u(t) \in \Omega(t, x(t))\}.$$

Заметим, что для выполнения условия а) достаточно, чтобы функция f удовлетворяла условию Липшица. При условии а) теорема позволяет находить обобщенное решение $\tilde{x}$ как предел при $|\delta| \to 0$ траекторий из выпуклой δ-аппроксимации $X(\delta, \Omega)$, упрощенных тем, что вместо процесса (5) оптимизируется процесс

$$\forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}) \quad \dot{x}(t) = \mathrm{const}, \dot{x}(t) \in [F_i(\tau_i, x(\tau_i))]. \tag{12}$$

Использование процесса (12) позволяет искать x_δ как решение обычной задачи математического программирования: найти такой набор $\bar{x}$ векторов x_i, который минимизирует функционал

$$\varphi_0(\bar{x}(\cdot)) \quad (\bar{x}(t) = x_i(-t + \tau_{i+1})/(\tau_{i+1} - \tau_i) + x_{i+1}(t - \tau_i)/(\tau_{i+1} - \tau_i)\ \forall t \in [\tau_i, \tau_{i+1}))$$

при ограничениях

$$\forall j = \overline{0, s} \quad \varphi_j(\bar{x}(\cdot)) \leqslant 0, \tag{14}$$

$$\forall i\ (x^{i+1} - x^i)/(\tau_{i+1} - \tau_i) \in [F(\tau_i, x^i)]. \tag{15}$$

В случае, когда $f: X_t \times U \times R \to X$ ($X_t \supset M$ — множество траекторий), очевидно, задача (13) — (15) принципиально не усложняется.

Лемма 2. $\forall_{y \subset K} \forall_{x: YL(x) = Yy}\ L_0(x) = YL(x) \Rightarrow$

$$\{z \mid z = L_0(x), L(x) \subset K\} = \{y \mid y = Ys, s \subset K\}.$$

При решении задачи (13) — (15) не требуется численное построение траектории системы (1) и, таким образом, обходятся трудности, возникающие при численном интегрировании дифференциальных уравнений [4]. Так, например, в задаче

$$\dot{x}_1(t) = u(t),\ \dot{x}_2(t) = u^2(t) - x_1^2(t),$$

$$\Omega = \{u \mid |u(t)| \leqslant 1\},\ \varphi_0 = x_2(1),\ \varphi_1 = x_2^2(0) + x_2^2(0),\ T \equiv [0, 1],$$

обобщенное решение $x_1^0(t) = 0$, $x_2^0(t) = t$ находится как решение задачи (13) — (15) уже при $|\delta| = 1$ ($\tau_0 = 0,\ \tau_1 = 1$), но оно принадлежит M и не может быть построено методами, основанными на интегрировании системы (1).

Для случая минимаксной задачи $\inf_{y,v} \sup_{x,u} \varphi_0(x, u, y, v)$ прямой проверкой по лемме 2 устанавливается следующая лемма.

Лемма 3. *Если u^0, v^0 — минимаксная точка функционала*

$$I(u, v) = z_2 A_2 y^0 + z_4 B^* z_1 + (z_2 - z_4) z_6 + z_5 (k + z_7)$$

на $\Omega \ni (u, v)$ и решение системы $B^* z_1 - A_2 y^0 - z_6 = 0$, $B z_2 \in k + K$, $z_8 \in K$, $A_3 y^0 - C^* z_1 - A_2^* z_4 - C^* z_5 = 0$, $z_1 \in -K^*$, $z_5 z_8 = 0$, $z_1 (k - B z_2) = 0$, $z_5 \in K^*$ удовлетворяет условию $z_6 = A_1 x^0$, $z_7 = -B x^0$, $z_8 = C y^0 + B x^0 - k$ при $u = u^0$, $v = v^0$, то y^0, v^0, x^0, u^0 — минимаксная точка функционала $J(x, u, y, v) \underline{\underline{\Delta}} A_1 xx + A_2 xy + A_3 yy$ при связях $Bx + Cy \in k + K$, $(u, v) \in \Omega$ и

$J(x^0, u^0, y^0, v^0) = J(u^0, v^0)$, где x, y и k — элементы некоторых линейных пространств X, Y и Z, $A_1 : X \times \Omega \to X^*$, $A_2 : X \times \Omega \to Y^*$, $A_3 : Y \times \Omega \to Y^*$, $B : X \times \Omega \to Z$, $C : Y \times \Omega \to Z$ — линейные по первому аргументу операторы, $K : \Omega \to 2^Z$ — конус, $k : \Omega \to Z$, $*$ — знак сопряжения.

Аналогично, x^0, u^0, y^0, v^0 — седловая точка J на $u \in \Omega_u$ $v \in \Omega_v$ при связях $Bx \in b + K_x$, $Cy \in c + K_y$, если она удовлетворяет системе $A_1 x^0 - B^* z_1 = -A_2^* y^0$, $z_1 \in -K_x^*$, $z_1 b + A_3 y^0 y^0 - z_2 c - A_1 x^0 x^0 = 0$, $A_2 x^0 - C^* z_2 + A_3 y^0 = 0$, $z_2 \in K_y^*$, $u^0 = \arg\max_{u \in \Omega_u} (z_1 b + A_2 y^0 y^0)$, $v^0 = \arg\min_{v \in \Omega_v} (A_1 x^0, x^0 + z_2 c)$.

Лемма 3 дает способ отыскания «$\{J, -J\}$-обобщенного решения», если Φ-обобщенное решение системы $f(x) \in K$ определить как $\sup_{k \in K} \psi_c k$ для каждого $c \in \Phi$ и для $\psi_c \in \{\varphi \mid \psi f(x) = cx\ \ \forall x \in \{\overline{x \mid f(x) \in K}\}\}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. Н. Моисеев, Численные методы в теории оптимальных систем, М., 1971.
2. Е. С. Левитин, Б. Т. Поляк, Методы минимизации при наличии ограничений, ЖВМ и МФ, т. 6, № 5, 1966.
3. Н. Н. Моисеев, Методы динамического программирования в теории оптимальных управлений, ЖВМ и МФ, т. 4, № 3, 1964.
4. В. В. Иванов, Обзор достижений в области кибернетики и вычислительной техники, Труды симпозиума Вопросы точности и эффективности вычислительных алгоритмов, вып. 2, К., 1969.
5. И. В. Бейко, М. Ф. Бейко, Численные методы решения задач оптимального управления, Изд. КДНТП, Научный Совет по кибернетике АН УССР, К., 1968.

Поступила 24.XI 1971 г.
Институт математики АН УССР,
Институт кибернетики АН УССР