УДК 517.925.31

# Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами

*Ф. М. Даннан*

В работе рассматривается вопрос об устойчивости решений скалярного уравнения

$$\ddot{x} + q(t)x = a(t)x + b(t)\dot{x} + f(x, \dot{x}, t), \tag{1}$$

где $q(t)$, $a(t)$ и $b(t)$ — непрерывные $\omega$-периодические функции, кроме того, функция $q(t)$ положительна и дважды дифференцируема; $f(x, \dot{x}, t)$ — нелинейная добавка.

1. Рассмотрим сначала неполное линейное уравнение

$$\ddot{x} + q(t)x = p(t)x, \tag{2}$$

где $p(t)$ — непрерывная $\omega$-периодическая функция. Решения уравнения (2), $x_1(t)$, $x_2(t)$ с начальными условиями

$$x_1(0) = \dot{x}_2(0) = 1, \quad \dot{x}_1(0) = x_2(0) = 0$$

удовлетворяют следующим интегральным уравнениям [1]:

$$x_1(t) = \varphi(t)\left[\varphi^{-1}(0)\cos\psi(t) + \int_0^t \varphi^2(t_1)\, p_1(t_1)\sin\psi(t, t_1)\, x_1(t_1)\, dt_1\right], \tag{3}$$

$$x_2(t) = \varphi(t)\left[\varphi(0)\sin\psi(t) + \int_0^t \varphi^2(t_1)\, p_1(t_1)\sin\psi(t, t_1)\, x_2(t_1)\, dt_1\right], \tag{4}$$

где

$$\varphi(t) = q^{-\frac{1}{4}}(t), \quad \psi(t) = \int_0^t q^{\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau = \psi(t, 0), \tag{5}$$

$$\sin\psi(t, t_1) = \sin[\psi(t) - \psi(t_1)], \quad \psi(t, t_1) = \int_{t_1}^{t} q^{\frac{1}{2}}(\tau)\, d\tau, \tag{6}$$

$$p_1(t) = p(t) + \eta(t), \quad \eta(t) = \frac{1}{4}\frac{q''(t)}{q(t)} - \frac{5}{16}\left(\frac{q'(t)}{q(t)}\right)^2. \tag{7}$$

В дальнейшем предполагается (без ограничения общности), что $q'(0) = 0$. Как известно, условие устойчивости для уравнения (2) следующее:

$$-2 < A < 2, \tag{8}$$

где

$$A = x_1(\omega) + \dot{x}_2(\omega). \tag{9}$$

Из уравнений (3) и (4) получаем [2]

$$A = 2\cos\psi(\omega) + \sin\psi(\omega)\int_0^{\omega} \varphi^2(t_1)\, p_1(t_1)\, dt_1 +$$

$$+ \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} \varphi^2(t_1)\, \varphi^2(t_2)\, p_1(t_1)\, p_1(t_2) \sin\psi(t_1, t_2) \sin\psi(\omega, t_1, t_2)\, dt_2 + \ldots$$

$$\ldots + \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{n-1}} \varphi^2(t_1) \ldots \varphi^2(t_n) p_1(t_1) \ldots p_1(t_n) \times \tag{10}$$

$$\times \sin\psi(t_1, t_2) \ldots \sin\psi(t_{n-1}, t_n) \sin\psi(\omega, t_1, t_n) + \ldots,$$

где

$$\psi(\omega, t_1, t_n) = \psi(\omega) - \psi(t_1) + \psi(t_n). \tag{11}$$

**2.** Рассмотрим скалярное уравнение

$$\ddot{x} + h(t)\, x = 0, \tag{12}$$

где $h(t)$ — непрерывная $\omega$-периодическая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^{\omega} h(t)\, dt \geqslant 0. \tag{13}$$

Уравнение (12) эквивалентно уравнению

$$\ddot{x} + \eta(t)\, x = [-h(t) + \eta(t)]\, x, \tag{14}$$

где $\eta(t)$ определяется формулой (7), а $q(t)$ такая же, как в уравнении (1).

Постоянная $A$ для уравнения (14) запишется в виде

$$A = 2 + \psi(\omega)\int_0^{\omega} \varphi^2(t_1)[\eta(t_1) - h(t_1)]\, dt_1 + \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} \varphi^2(t_1)\, \varphi^2(t_2)[\eta(t_1) -$$

$$- h(t_1)][\eta(t_2) - h(t_2)]\, \psi(t_1, t_2)\, \psi(\omega, t_1, t_2)\, dt_2 + \ldots, \tag{15}$$

где $\psi(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t_k, t_{k+1})$ и $\psi(\omega, t_1, t_k)$ определяется формулами (5), (6) и (11).

Заметим, что если функция $q(t)$ удовлетворяет неравенству $\eta(t) - h(t) > 0$, $0 \leqslant t \leqslant \omega$, то из (15) видно, что $A > 2$, т. е. уравнение (12) неустойчиво. В случае $\eta(t) - h(t) < 0$, $0 \leqslant t \leqslant \omega$, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Если существует $\omega$-периодическая дважды непрерывно дифференцируемая положительная функция $q(t)$ такая, что*

$$\eta(t) - h(t) < 0 \ \text{для}\ 0 \leqslant t \leqslant \omega \tag{16}$$

и

$$\int_0^{\omega} q^{-\frac{1}{2}}(t)\,[h(t)-\eta(t)]\,dt \leqslant \frac{4}{\int_0^{\omega} q^{\frac{1}{2}}(t)\,dt}, \tag{17}$$

*то все решения уравнения* (12) *устойчивы.*

Доказательство. В силу (16) выражение для $A$ можно записать так:

$$A = 2 - I_0 + I_1 - \ldots + (-1)^{k+1} I_k + \ldots, \tag{18}$$

$$I_0 = \psi(\omega) \int_0^{\omega} \varphi^2(t)\,[h(t)-\eta(t)]\,dt > 0, \tag{19}$$

$$I_k = \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \ldots \int_0^{t_{k-1}} \varphi^2(t_1)\ldots\varphi^2(t_k)\,[h(t_1)-\eta(t_1)]\ldots$$
$$\ldots [h(t_k)-\eta(t_k)]\,\psi(t_1,t_2)\ldots\psi(t_{k-1},t_k)\,\psi(\omega,t_1,t_k)\,dt_k > 0 \quad (k=1,2,\ldots). \tag{20}$$

Нетрудно доказать, что при выполнении условия (17) ряд (18) представляет собой ряд Лейбница и, значит, справедливы оценки $2-\psi(\omega)\int_0^{\omega}\varphi^2(t) \times$ $\times [h(t)-\eta(t)] < A < 2$, или в силу неравенства (17) $|A| < 2$, т. е. уравнение (12) устойчиво. В качестве примера возьмем $q(t) = h^2(t)$, тогда для уравнения

$$\ddot{x} + h(t)\,x = 0, \quad h(t) > 0 \tag{21}$$

(кроме того, $h(t)$ — $\omega$-периодическая дважды непрерывно дифференцируемая функция) условия теоремы 1 приобретают вид

$$h(t)-\eta(t) = h(t) - \frac{h''(t)}{2h(t)} + \frac{3}{4}\left(\frac{h'(t)}{h(t)}\right)^2 > 0, \tag{22}$$

$$\omega \leqslant \frac{4}{\int_0^{\omega} h(t)\,dt} + \int_0^{\omega} h^{-1}(t)\,\eta(t)\,dt. \tag{23}$$

Так как

$$\int_0^{\omega} h^{-1}(t)\,\eta(t)\,dt = \int_0^{\omega}\left(\frac{h''}{2h^2} - \frac{3}{4}\frac{h'^2}{h^3}\right)dt = \frac{1}{4}\int_0^{\omega}\frac{h'^2}{h^3}\,dt > 0,$$

то условие (23) применительно к уравнению (21) будет более общим с нагрузкой (т. е. должно выполняться дополнительное условие (22)), чем известное условие Ляпунова

$$\omega \leqslant \frac{4}{\int_0^{\omega} h(t)\,dt} \tag{24}$$

в том смысле, что правая часть неравенства (23) больше правой части неравенства (24).

**3.** Пусть имеем полное уравнение

$$\ddot{y} + q(t)\,y = a(t)\,y + b(t)\,\dot{y}, \tag{25}$$

в котором $a(t)$ и $b(t)$ — непрерывные, $\omega$-периодические функции, кроме того, $b(t)$ имеет непрерывную производную на $0 \leqslant t \leqslant \omega$. Введем замену

$$y(t) = x(t) \exp \frac{1}{2} \int_0^t b(\tau)\, d\tau, \tag{26}$$

тогда получаем относительно $x$ уравнение (2):

$$\ddot{x} + q(t)\, x = p(t) x,$$

где

$$p(t) = a(t) + \frac{b^2(t)}{4} - \frac{b'(t)}{2}. \tag{27}$$

Мультипликаторы $\rho^*_{1,2}$ и $\rho_{1,2}$ уравнений (25) и (2) соответственно связаны соотношениями [1]

$$\rho^*_{1,2} = e^{\frac{\beta}{2}} \rho_{1,2}, \tag{28}$$

где

$$\beta = \int_0^\omega b(t)\, dt, \text{ а } \rho_{1,2} = \frac{A}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - 4}. \tag{29}$$

Рассмотрим три случая:

1) $\beta = 0$, в этом случае уравнения (25) и (2) в смысле устойчивости эквивалентны;

2) $\beta > 0$, решения уравнения (25) всегда неустойчивы;

3) $\beta < 0$, т. е. $e^{\beta/2} < 1$, в этом случае решения уравнения (25) могут быть как устойчивыми или асимптотически устойчивыми, так и неустойчивыми.

Исследуем все возможности третьего случая.

а) Если решения уравнения (2) устойчивы, то решения уравнения (25) будут асимптотически устойчивыми.

б) Пусть решения уравнения (2) неустойчивы, т. е. $|A| > 2$. Для асимптотической устойчивости решений уравнения (25) должно выполняться неравенство

$$\rho^*_{1,2} < 1. \tag{30}$$

Пусть $A > 2$, тогда из (28) следует, что для выполнения неравенства (30) необходимо и достаточно, чтобы $\rho^*_1 = e^{\beta/2}[A/2 + \sqrt{A^2 - 4}/2] < 1$ или $A < 2\,\mathrm{ch}(\beta/2)$. Аналогично, при $A < -2$ получаем неравенство $A > -2\,\mathrm{ch}(\beta/2)$.

Итак, условие асимптотической устойчивости для решений уравнения (25) имеет вид

$$|A| < 2\,\mathrm{ch}(\beta/2). \tag{31}$$

Когда $|A| = 2\,\mathrm{ch}(\beta/2)$, то имеем $\rho^*_1 = e^{\beta/2} < 1$ и $\rho^*_2 = 1$.

В этом случае решения уравнения (25) будут устойчивы, кроме того, это уравнение имеет однопараметрическое семейство $\omega$-периодических решений. Если $|A| > 2\,\mathrm{ch}(\beta/2)$, то уравнение (25) неустойчиво. Действительно, пусть $A > 2\,\mathrm{ch}(\beta/2)$; если мы докажем, что при этом условии один из мультипликаторов $\rho^*_{1,2} > 1$, то отсюда будет следовать наше утверждение.

Пусть $A > 2\,\mathrm{ch}(\beta/2)$. Тогда $A^2 - 4 > (2e^{-\beta/2} - A)^2$ и $\rho^*_1 = \frac{e^{\beta/2}}{2} \times (A + \sqrt{A^2 - 4}) > 1$. Аналогично можно доказать, что и при $A < -2\,\mathrm{ch}(\beta/2)$ имеем $\rho^*_i > 1$. Этим доказана справедливость нашего утверждения.

З а м е ч а н и е 1. Условие (31) другим путем получено В. М. Старжинским [3].

Т е о р е м а 2. *Если выполняются условия*

$$1 + \exp \int_0^{\omega} \varphi^2(t) \, | p_1(t) | \, dt \leqslant 2 \operatorname{ch}(\beta/2), \tag{32}$$

$$\beta < 0, \tag{33}$$

*где* $\varphi(t)$, $p(t)$ *и* $\beta$ *определяются формулами* (5), (7), (27) *и* (29) *соответственно, то решения уравнения* (25) *будут асимптотически устойчивыми.*

Действительно, из (10) имеем

$$|A| < 2 + \int_0^{\omega} \varphi^2(t_1) \, | p_1(t_1) | \, dt_1 + \int_0^{\omega} dt_1 \int_0^{t_1} \varphi^2(t_1) \, \varphi^2(t_2) \, | p_1(t_1) | \, | p_1(t_2) | \, dt_2 + \ldots$$

или

$$A < 1 + \exp \int_0^{\omega} \varphi^2(t) \, |p_1(t)| \, dt;$$

отсюда и из неравенства (31) получаем условие (32).

П р и м е р 1. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \frac{\lambda^2}{(3 + 2\cos t)^2} \, x = \left[ \frac{2 - \cos t - \cos^2 t}{(3 + 2\cos t)^2} \right] x - 2\alpha^2 \dot{x}, \tag{34}$$

где

$$p_1(t) = \alpha^4 + \frac{1}{3 + 2\cos t} > 0, \;\; \beta = -4\alpha^2\pi.$$

Условие (32) имеет вид

$$1 + \exp \frac{2\pi}{\lambda} (1 + \alpha^4) \leqslant 2 \operatorname{ch} 2\alpha^2\pi$$

или

$$\lambda > \frac{2\pi(1 + \alpha^4)}{\ln(2 \operatorname{ch} 2\alpha^2\pi - 1)}.$$

Следовательно, при выполнении последнего неравенства решения уравнения (34) асимптотически устойчивы. В случае, когда $p_1(t) > 0$ на $0 \leqslant t \leqslant \omega$ и

$$0 < \psi(\omega) < \frac{2\pi}{3}, \tag{35}$$

условие (32) можно улучшить.

При выполнении (35)

$$\cos \psi(\omega) \geqslant -\frac{1}{2}, \tag{36}$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\psi(\omega)}{2} \leqslant \sin \psi(\omega), \tag{37}$$

$$m \leqslant \sin \psi(t_k, t_{k+1}), \quad 0 < m \leqslant 1, \tag{38}$$

$$m \leqslant \sin \psi(\omega, t_1, t_k), \quad 0 < m \leqslant 1, \tag{39}$$

$$\sin \psi(t_k, t_{k+1}) \sin \psi(\omega, t_1, t_{k+1}) \leqslant \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\psi(\omega)}{2} \sin \psi(\omega, t_1, t_k). \tag{40}$$

Так как $\psi(t)$ — возрастающая функция и $0 < t_{k+1} \leqslant t_k \leqslant \omega$, то $0 < \psi(t_k) - \psi(t_{k+1}) < \psi(t_k) < \psi(\omega)$, откуда следует неравенство (38). Неравенство (39) доказывается аналогично.

Для доказательства (40) запишем

$$\sin\psi(t_k, t_{k+1})\sin\psi(\omega, t_1, t_{k+1}) \leqslant \frac{1}{4}[\sin\psi(t_k, t_{k+1}) + \sin\psi(\omega, t_1, t_{k+1})]^2 =$$

$$= \sin^2\frac{\psi(\omega, t_1, t_k)}{2}\cos^2\frac{\psi(\omega) - \psi(t_1) - \psi(t_k) + 2\psi(t_{k+1})}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sin^2\frac{\psi(\omega, t_1, t_k)}{2} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi(\omega, t_1, t_k)}{2}\sin\psi(\omega, t_1, t_k) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi(\omega)}{2}\sin\psi(\omega, t_1, t_k).$$

Учитывая неравенства (36), (38), (39), из (10) получаем

$$A > -1 + mL(\omega) + \frac{m^2L^2(\omega)}{2!} + \ldots = -2 + e^{mL(\omega)}, \tag{41}$$

где

$$L(\omega) = \int_0^\omega \varphi^2(t)\, p_1(t)\, dt. \tag{42}$$

Используя неравенство (40), из (10) имеем

$$A < 2\cos\psi(\omega) + \sin\psi(\omega)\, L(\omega) + \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi(\omega)}{2}\sin\psi(\omega)\frac{L^2(\omega)}{2!} +$$

$$+ \left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi(\omega)}{2}\right)^2\sin\psi(\omega)\frac{L^3(\omega)}{3!} + \ldots \tag{43}$$

или

$$A < -2 + 4\cos^2\frac{\psi(\omega)}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi(\omega)}{2}L(\omega)\right), \tag{44}$$

где $L(\omega)$ определяется формулой (42).

Из (31), (41) и (44) видим, что когда выполняется неравенство

$$-2 + 4\cos^2\frac{\psi(\omega)}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi(\omega)}{2}L(\omega)\right) < 2\operatorname{ch}\frac{\beta}{2}, \tag{45}$$

то решения уравнения (25) асимптотически устойчивы. Неравенство (45) можно записать в виде

$$\cos^2\frac{\psi(\omega)}{2}\exp\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{\psi(\omega)}{2}L(\omega)\right) < \operatorname{ch}^2\frac{\beta}{4}$$

или

$$L(\omega) < 4\operatorname{ctg}\frac{\psi(\omega)}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{ch}(\beta/4)}{\cos(\psi(\omega)/2)}\right|. \tag{46}$$

Как видно из (37), (32) и (43), условие (46) улучшает условие (32).

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + f(t)\,x + 2a\dot{x} = 0, \quad a > 0, \tag{47}$$

где $f(t)$ — $\omega$-периодическая знакопеременная функция и $f(t) < a^2 + c^2$ ($c$ — некоторая постоянная). Ввиду знакопеременности $f(t)$ критерии, полученные в работах [4 и 5], к этому уравнению не применимы. Запишем уравнение (47) в виде

$$\ddot{x} + c^2x = [c^2 - f(t)]\,x - 2a\dot{x}$$

и применим к нему наш критерий (46); тогда получаем следующее условие асимптотической устойчивости для решений уравнения (47)

$$\int_0^\omega f(t)\,dt > (a^2 + c^2)\,\omega - 4\,\mathrm{ctg}\,\frac{\omega c}{2}\ln\left(\frac{\mathrm{ch}\,a\omega/2}{\cos\omega c/2}\right)$$

при $0 < \omega c < \dfrac{2\pi}{3}$.

4. Рассмотрим, наконец, нелинейное уравнение (1):

$$\ddot{x} + q(t)\,x = a(t)\,x + b(t)\,\dot{x} + f(x, \dot{x}, t)$$

и применим к нему теорему 1 и теорему Ляпунова [6], тогда будет иметь место следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия, наложенные на коэффициенты уравнения* (1), *и пусть, кроме того,*

а) $\beta = \int\limits_0^\omega b(t)\,dt < 0;$

б) $$1 + \exp\int_0^\omega \varphi^2(t)\,|p_1(t)|\,dt \leqslant 2\,\mathrm{ch}\,\frac{\beta}{2}; \qquad (48)$$

в) *в области* $D$: $t \geqslant 0$, $|x| < H$, $|\dot{x}| < H$, *функция* $f(x, \dot{x}, t)$ *непрерывна и удовлетворяет неравенству*

$$|f(x, \dot{x}, t)| \leqslant \theta(|x| + |\dot{x}|),\ \ \theta = \mathrm{const};$$

г) *функция* $f(x, \dot{x}, t)$ *удовлетворяет некоторым общим условиям, при которых уравнение* (1) *имеет единственное решение при любых начальных значениях, взятых из области* $D$.

*Тогда при достаточно малом* $\theta$ *невозмущенное решение уравнения* (1) *будет асимптотически устойчивым.*

Замечание 2. В случае, когда $p_1(t)$ — знакопостоянная, условие (48) можно заменить условием (46).

Автор искренне благодарит И. А. Павлюка за постановку задачи и постоянное внимание при выполнении работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. І. А. Павлюк, Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку, Вид-во КДУ, 1970.
2. Ф. М. Даннан, Дослідження стійкості розв'язків диференціальних рівнянь другого порядку з періодичними коефіцієнтами методом диференціального інваріанту, ДАН УРСР, сер. А, № 4, 1972.
3. В. М. Старжинский, Замечание об устойчивости периодического движения, ПММ, т. 19, вып. 1, 1955.
4. М. Я. Леонов, О квазигармонических колебаниях, ПММ, т. 10, вып. 5—6, 1946.
5. В. М. Старжинский, Достаточные условия устойчивости одной механической системы с одной степенью свободы, ПММ, т. 16, вып. 3, 1952.
6. И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, «Наука», М., 1966.

Поступила 19.V 1972 г.
Киевский государственный университет