УДК 517.948:513.88:518

О приближении функций двух переменных линейными положительными операторами в метрике L_p

З. В. Зарицкая

В этой заметке, пользуясь методом В. К. Дзядыка, будем распространять результаты работ [1 и 2] на случай приближения функций двух переменных линейными положительными операторами (л. п. о.).

1. Пусть $U_n(f;\ x,\ y)$ — последовательность л. п. о., отображающих пространство $L_p[-1,1;-1,1]$ функций, интегрируемых в p-й степени, в себя ($1 \leqslant p < +\infty$). Норму функции f в пространстве L_p будем обозначать $\|f\|_p$.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность линейных положительных операторов $U_n(f;\ x,\ y)$ для произвольной функции $f(x,\ y) \in L_p[-1,1;\ -1,1]$ сходилась в метрике L_p к этой функции, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:*

1) *нормы операторов должны быть равномерно ограничены некоторым числом $M > 0$:*

$$\|U_n\| \leqslant M, \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{1}$$

2) *последовательность значений операторов U_n на функциях $1,\ x,\ y,\ x^2 + y^2$ должна сходиться в L_p соответственно к этим функциям, так что*

$$\lim \| 1 - U_n(1;\ x, y) \|_p = \lim \| x - U_n(t;\ x, y) \|_p =$$

$$= \lim \| y - U_n(v;\ x, y) \|_p = \lim \| (x^2 + y^2) - U_n(t^2 + v^2;\ x, y) \|_p = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость первого условия вытекает из теоремы Банаха — Штейнгауза, необходимость второго условия очевидна.

Достаточность. Убедимся сначала, что значения операторов U_n на функции $\psi(f,\ v) = (x-t)^2 + (y-v)^2$, в которой x и y рассматриваются как параметры, сходятся в метрике L_p к нулю. Действительно,

$$\left(\iint\limits_{-1 \leqslant x,\ y \leqslant 1} | U_n [(t-x)^2 + (v-y)^2;\ x, y] |^p \, dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \| U_n(t^2 + v^2;\ x, y) - (x^2 + y^2) \|_p + \| -2x [U_n(t;\ x, y) - x] \|_p +$$

$$+ \| -2y [U_n(v;\ x, y) - y] \|_p + 2 \| U_n(1;\ x, y) - 1 \|_p \to 0. \tag{3}$$

Пусть теперь $f(x, y)$ — произвольная функция из $L_p[-1, 1;\ -1, 1]$. Так как в пространстве $L_p[-1, 1;\ -1, 1]$ множество непрерывных на $[-1, 1;\ -1, 1]$ функций всюду плотно, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная функция $f^*(x, y) \in C[-1, 1;\ -1, 1]$, что

$$\| f(x, y) - f^*(x, y) \|_p < \varepsilon \tag{4}$$

и такое $\delta > 0$, чтобы при $(t-x)^2 + (v-y)^2 \leqslant \delta^2$, (t, v), $(x,\ y) \in [-1,\ 1;\ -1,\ 1]$ иметь

$$| f^*(t, v) - f^*(x, y) | < \varepsilon.$$

Тогда, полагая

$$\| f^*(x, y) \|_{C[-1,1;\ -1,1]} = M_1,$$

получим для произвольных x, y, t, v

$$| f^*(x, y) - f^*(t, v) | < \varepsilon + \frac{2M_1}{\delta^2} \cdot \psi(t, v). \tag{5}$$

Учитывая (1) — (5) и положительность операторов U_n, получим

$$\| f(x, y) - U_n(f;\ x, y) \|_p \leqslant \| f(x, y) - f^*(x, y) \|_p + \| U_n(f^* - f;\ x, y) \|_p +$$

$$+ \| f^*(x, y) U_n(1;\ x, y) - U_n(f^*(t, v);\ x, y) \|_p + \| f^*(x, y) - f^*(x, y) U_n(1; x, y) \|_p \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon + M \| f^* - f \|_p + \| U_n([f^*(t, v) - f^*(x, y)];\ x, y) \|_p + M_1 \| 1 - U_n(1;$$

$$x, y) \|_p < \varepsilon(1 + M) + \left\| U_n\left(\varepsilon + \frac{2M}{\delta^2} \psi(t, v);\ x, y \right) \right\|_p + M_1 \| 1 - U_n(1; x, y) \|_p \to 0$$

при $n \to \infty$, это и означает, что

$$\lim \| f(x, y) - U_n(f; x, y) \|_p = 0.$$

Теорема 1 доказана.

Отметим, что теорема 1, доказанная в этой заметке для приближения непериодических функций л. п. о., остается в силе также для случая приближения 2π-периодических по обеим переменным функций $f(x, y)$ с той разницей, что в этом случае систему функций $1, x, y, x^2 + y^2$ достаточно заменить системой $1, \sin x, \sin y, \cos x, \cos y$.

2. Из известной теоремы об общем виде линейного функционала вытекает, что если линейный положительный оператор U_n представляет собой алгебраический полином порядка $\leqslant n$ по каждой переменной, то общий вид этого оператора в пространстве L_p $(1 \leqslant p < +\infty)$ будет следующим:

$$U_n(f; x, y) = \int_{-1}^{1} dt \int_{-1}^{1} f(t, v)\, K_n(x, y, t, v)\, dv, \tag{6}$$

где

$$K_n(x, y, t, v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_{ik}(t, v)\, x^i y^k, \quad m \leqslant n,$$

причем каждая из функций $a_{ik}(t, v)$ принадлежит к сопряженному к L_p пространству.

Для того чтобы линейный полиномиальный оператор (6) был положительным, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы при всех фиксированных x и y ядро $K_n(x, y, t, v)$ было почти всюду в $[-1, 1; -1, 1] \geqslant 0$.

3. В с п о м о г а т е л ь н ы е н е р а в е н с т в а. Если $T_n(t, v)$ — неотрицательный тригонометрический полином от двух переменных порядка $\leqslant n$ по каждой из переменных, то при произвольных a и b имеет место неравенство:

$$\int_{a-\frac{1}{4n}}^{a+\frac{1}{4n}} dt \int_{b-\frac{1}{4n}}^{b+\frac{1}{4n}} T_n(t, v)\, dv < \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dt \int_{-\pi}^{\pi} T_n(t, v)\, dv, \tag{7}$$

которое получается из неравенства С. Н. Бернштейна $\| T_n' \|_C \leqslant n \| T_n \|_C$.

Из (7) (если в нем положить $T_n(t, v) = P_n(\cos t, \cos v) \sin t \sin v$) вытекает неравенство

$$\int\limits_{[t-\widetilde{\rho}_n(t),\, t+\widetilde{\rho}_n(t)] \cap [-1, 1]} dx \int\limits_{[v-\widetilde{\rho}_n(v),\, v+\widetilde{\rho}_n(v)] \cap [-1, 1]} P_n(x, y)\, dy <$$

$$< \frac{1}{2} \iint\limits_{-1 \leqslant x,\, y \leqslant 1} P_n(x, y)\, dx dy, \tag{8}$$

где

$$\widetilde{\rho}_n(t) = \frac{\sqrt{1 - t^2}}{160n} + \frac{1}{1600n^2}, \quad t \in [-1, 1],$$

$P_n(x, y)$ — алгебраический многочлен степени не выше n по каждой переменной, который принимает неотрицательные значения на $[-1, 1; -1, 1]$.

4. Т е о р е м а 2. *Для каждого линейного положительного оператора* $U_n(f; x, y)$, *определенного на одном из пространств* $L_p[-1, 1; -1, 1]$

$(p \geqslant 1)$, *который представляет собой алгебраический многочлен степени* $\leqslant n$ *по каждой переменной, имеет место неравенство*

$$\left\| \frac{1 - U_n(1; x, y)}{\rho_n^2(x)} \right\|_p + \left\| \frac{1 - U_n(1; x, y)}{\rho_n^2(y)} \right\|_p + \left\| \frac{x - U_n(t; x, y)}{\rho_n^2(x)} \right\|_p +$$

$$+ \left\| \frac{y - U_n(v; x, y)}{\rho_n^2(y)} \right\|_p + \left\| \frac{x^2 - U_n(t^2; x, y)}{\rho_n^2(x)} \right\|_p + \left\| \frac{y^2 - U_n(v^2; x, y)}{\rho_n^2(y)} \right\|_p \geqslant C, \quad (9)$$

где $C \geqslant \frac{1}{4}$, $\rho_n(x) = \frac{1}{2000n}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n} + \frac{1}{n^2}\right)$.

Доказательство. Рассмотрим два уравнения

$$t = x + \frac{\sqrt{1-x^2}}{2000n} + \frac{1}{2000n^2} \equiv x + \rho_n(x), \quad (10)$$

$$t = x - \frac{\sqrt{1-x^2}}{2000n} - \frac{1}{2000n^2} \equiv x - \rho_n(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (11)$$

Так как на промежутке $[-1, x^*]$ (где x^* удовлетворяет уравнению $x + \rho_n(x) = 1$) функция $t(x) = x + \rho_n(x)$ монотонно возрастает от $-1 + \frac{1}{2000n^2}$ до 1, то на промежутке $\left[-1 + \frac{1}{2000n^2}, 1\right]$ уравнение (10) определяет однозначную обратную функцию $x = \Phi_n^{(1)}(t)$. На промежуток $\left[-1, -1 + \frac{1}{2000n^2}\right]$ функцию $\Phi_n^{(1)}(t)$ продолжим значением -1. Аналогично, $\Phi_n^{(2)}(t)$ — функция, обратная к функции (11) на $\left[-1, 1 - \frac{1}{2000n^2}\right]$ и равна 1 при $t \in \left[1 - \frac{1}{2000n^2}, 1\right]$.

Легко показать, что при всех $n = 1, 2, \ldots$; $t \in [-1, 1]$

$$\begin{aligned} \Phi_n^{(1)}(t) &\geqslant \varphi_n^{(1)}(t) \equiv t - \frac{\sqrt{1-t^2}}{2000n} - \frac{1}{2000n^2}\,\frac{2201}{2000}, \\ \Phi_n^{(2)}(t) &\leqslant \varphi_n^{(2)}(t) \equiv t + \frac{\sqrt{1-t^2}}{2000n} + \frac{1}{2000n^2}\,\frac{2201}{2000}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\varphi_n^{(1)}(t) > t - \tilde{\rho}_n(t), \quad \varphi_n^{(2)}(t) < t + \tilde{\rho}_n(t). \quad (13)$$

Учитывая (12), (13) и (8), получим

$$\int\limits_{\Phi_n^{(1)}(t)}^{\Phi_n^{(2)}(t)} dx \int\limits_{\Phi_n^{(1)}(v)}^{\Phi_n^{(2)}(v)} P_n(x, y)\, dy \leqslant \iint\limits_{[\varphi_n^{(1)}(t),\, \varphi_n^{(2)}(t);\; \varphi_n^{(1)}(v),\, \varphi_n^{(2)}(v)] \cap [-1, 1;\, -1, 1]} P_n(x, y)\, dx dy <$$

$$< \iint\limits_{[t - \tilde{\rho}_n(t),\, t + \tilde{\rho}_n(t);\; v - \tilde{\rho}_n(v),\, v + \tilde{\rho}_n(v)] \cap [-1, 1;\, -1, 1]} P_n(x, y)\, dx dy < \frac{1}{2} \iint\limits_{-1 \leqslant x,\, y \leqslant 1} P_n(x, y)\, dx dy, \quad (14)$$

где $P_n(x, y)$ — произвольный алгебраический многочлен степени $\leqslant n$ по каждой переменной, неотрицательный на $[-1, 1; -1, 1]$.

На основании (14) для ядра $K_n(x, y, t, v)$, определяющего оператор $U_n(f; x, y)$ (см. равенство (6)), получим

$$\iint\limits_{-1\leqslant x,\, y\leqslant 1} dxdy \iint\limits_{[x-\varrho_n(x),\, x+\varrho_n(x);\; y-\varrho_n(y),\, y+\varrho_n(y)]} K_n(x, y, t, v)\, dtdv =$$

$$= \iint\limits_{-1\leqslant t,\, v\leqslant 1} dtdv \iint\limits_{\substack{\Phi_n^{(1)}(t)\leqslant x\leqslant \Phi_n^{(2)}(t)\\ \Phi_1^{(1)}(v)\leqslant y\leqslant \Phi_n^{(2)}(v)}} K_n(x, y, t, v)\, dxdy <$$

$$< \frac{1}{2} \iiiint\limits_{-1\leqslant x, y, t, v\leqslant 1} K_n(x, y, t, v)\, dxdydtdv,$$

$$I_n(x, y) \equiv \iint\limits_{-1\leqslant x,\, y\leqslant 1} dxdy \iint\limits_{[-1,1;\, -1,1]\setminus(x-\varrho_n(x),\, x+\varrho_n(x);\; y-\varrho_n(y),\, y+\varrho_n(y))} K_n(x,y,t,v)dtdv >$$

$$> \frac{1}{2} \iiiint\limits_{-1\leqslant x,\, y,\, t,\, v\leqslant 1} K_n(x, y, t, v)\, dxdydtdv. \tag{15}$$

Будем считать, что

$$U_n(1; x, y) = \iint\limits_{-1\leqslant t,\, v\leqslant 1} K_n(x, y, t, v)\, dtdv = 1 + \varepsilon_n(x, y),$$

где

$$\| \varepsilon_n(x, y) \|_p < \frac{1}{32}. \tag{16}$$

Если бы это неравенство не выполнялось, то

$$\left\| \frac{1 - U_n(1; x, y)}{\rho_n^2(x)} \right\|_p \geqslant 10^6 \| 1 - U_n(1; x, y) \|_p = 10^6 \| \varepsilon_n(x, y) \|_p \geqslant \frac{10^6}{32} > 30000,$$

и неравенство (9) имеет место с константой $C = 30\,000$. Из (16) следует

$$\iint\limits_{-1\leqslant x,\, y\leqslant 1} | \varepsilon_n(x, y) |\, dxdy \leqslant \| \varepsilon_n(x, y) \|_p \Bigg(\iint\limits_{-1\leqslant x, y\leqslant 1} dxdy \Bigg)^{\frac{1}{q}} \leqslant 4 \| \varepsilon_n(x,y) \|_p < \frac{1}{8},$$

а поэтому вследствие (15)

$$I_n(x, y) > \frac{1}{2} \iint\limits_{-1\leqslant x,\, y\leqslant 1} (1 - | \varepsilon_n(x, y) |)\, dxdy > \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{8}\right) = \frac{31}{16}. \tag{17}$$

Отсюда следует, что

$$mE = m\left\{(x, y): \iint\limits_{[-1,1;\, -1,1]\setminus(x-\varrho_n(x),\, x+\varrho_n(x);\; y-\varrho_n(y),\, y+\varrho_n(y))} K_n(x, y, t, v)\, dtdv < \frac{1}{4}\right\} < 3. \tag{18}$$

Действительно, если бы неравенство (18) не выполнялось, т. е. $mE \geqslant 3$, то

$$I_n(x, y) = \iint\limits_{-1\leqslant x,\, y\leqslant 1} dxdy \iint\limits_{[-1,1;\, -1,1]\setminus(x-\varrho_n(x),\, x+\varrho_n(x);\; y-\varrho_n(y),\, y+\varrho_n(y))} K_n(x, y, t, v)\, dtdv =$$

$$= \iint\limits_{E} dxdy \int\limits_{[-1,1;\, -1,1]\setminus(x-\varrho_n(x),\, x+\varrho_n(x);\; (y-\varrho_n(y),\, y+\varrho_n(y))} K_n(x, y, t, v)\, dtdv +$$

$$+\iint\limits_{[-1,1;\,-1,1]\setminus E} dxdy \iint\limits_{[-1,1;\,-1,1]\setminus(x-\varrho_n(x),\,x+\varrho_n(x);\,y-\varrho_n(y),\,y+\varrho_n(y))} K_n(x,y,t,v)\,dtdv <$$

$$<\frac{1}{4}mE+\iint\limits_{[-1,1;\,-1,1]\setminus E}[1+|\varepsilon_n(x,y)|]\,dxdy \leqslant \frac{1}{4}mE+(4-mE)+\frac{1}{8}=$$

$$=4-\frac{3}{4}mE+\frac{1}{8}<4-\frac{3}{4}\cdot 3+\frac{1}{8}=\frac{30}{16}<\frac{31}{16},$$

и мы бы пришли к противоречию с неравенством (17).

Вследствие (18), полагая $E'=[-1,1;\,-1,1]\setminus E$, получим

$$mE'=m\left\{(x,y):\iint\limits_{[-1,1;\,-1,1]\setminus(x-\varrho_n(x),\,x+\varrho_n(x);\,y-\varrho_n(y),\,y+\varrho_n(y))} K_n(x,y,t,v)\,dtdv \geqslant \frac{1}{4}\right\}>1,$$

и отсюда

$$\left\|\frac{U_n[(x-t)^2;x,y]}{\rho_n^2(x)}\right\|_p \geqslant$$

$$\geqslant\left\{\iint\limits_{E'}\left|\frac{\iint\limits_{[-1,1;\,-1,1]\setminus(x-\varrho_n(x),\,x+\varrho_n(x);\,y-\varrho_n(y),\,y+\varrho_n(y))}(x-t)^2K_n(x,y,t,v)\,dtdv}{\rho_n^2(x)}\right|^p dxdy\right\}^{\frac{1}{p}}\geqslant$$

$$\geqslant\left\{\iint\limits_{E'}\left|\frac{\rho_n^2(x)\iint\limits_{[-1,1;-1,1]\setminus(x-\varrho_n(x),x+\varrho_n(x);y-\varrho_n(y),y+\varrho_n(y))}K_n(x,y,t,v)\,dtdv}{\rho_n^2(x)}\right|^p dxdy\right\}^{\frac{1}{p}}\geqslant$$

$$\geqslant\left\{\iint\limits_{E'}\left(\frac{1}{4}\right)^p dxdy\right\}^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{4}(mE')^{\frac{1}{p}}>\frac{1}{4}.$$

Сравнивая это неравенство с неравенством

$$\left\|\frac{U_n[(x-t)^2;x,y]}{\rho_n^2(x)}\right\|_p\leqslant\left\|\frac{x^2-U_n(t^2;x,y)}{\rho_n^2(x)}\right\|_p+\left\|\frac{-2x[x-U_n(t;x,y)]}{\rho_n^2(x)}\right\|_p+$$

$$+\left\|\frac{x^2[1-U_n(1;x,y)]}{\rho_n^2(x)}\right\|_p\leqslant 2\left\{\left\|\frac{x^2-U_n(t^2;x,y)}{\rho_n^2(x)}\right\|_p+\right.$$

$$\left.+\left\|\frac{x-U_n(t;x,y)}{\rho_n^2(x)}\right\|_p+\left\|\frac{1-U_n(1;x,y)}{\rho_n^2(x)}\right\|_p\right\},$$

убеждаемся в справедливости теоремы 2.

Теорема 3. *Для произвольного линейного положительного оператора $U_n(f;x,y)$, определенного на одном из пространств L_p $(1\leqslant p<+\infty)$, который представляет собой тригонометрический полином порядка $\leqslant n$ по каждой переменной, имеет место неравенство*

$$\|1-U_n(1;x,y)\|_p+\|\cos x-U_n(\cos t;x,y)\|_p+\|\sin x-U_n(\sin t;x,y)\|_p+$$

$$+\|\cos y-U_n(\cos v;x,y)\|_p+\|\sin y-U_n(\sin v;x,y)\|_p\geqslant\frac{A}{n^2}, \tag{19}$$

где A — абсолютная положительная постоянная, которая не зависит ни от n, ни от оператора $U_n(f;x,y)$, ни от p.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 2, только вместо неравенства (8) нужно воспользоваться неравенством (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. В. К. Дзядык, О приближении функций линейными положительными операторами, Матем. сб., т. 70, № 4, 1966.
2. З. В. Зарицька, Про наближення функцій лінійними додатними операторами в матриці L_p, ДАН УРСР, сер. А, № 1, 1967.

Поступила 26. II 1972 г.
Луцкий педагогический институт