УДК 539.126+517.948.35

Пример локально коммутативного операторного поля

В. Д. Кошманенко

В заметке построено пространство более широкое, чем пространство Фока. В этом пространстве определено эрмитово скалярное поле операторов $A(\varphi)$, удовлетворяющее аксиоме локальной коммутативности в более полном объеме, чем свободное поле. Показано также, что поле $A(\varphi)$ удовлетворяет и всем остальным аксиомам теории поля [1—3], исключая аксиому спектральности.

1. Пусть в некотором пространстве Гильберта $\mathscr{H}$ определено поле операторов $A(\varphi)$ ($\varphi(x) \in S$ — пространство основных функций Л. Шварца, $x \in M^4$ — пространство Минковского).

Поле $A(\varphi)$ называется локально коммутативным, если коммутатор

$$[A(\varphi_1), A(\varphi_2)] = 0 \tag{1}$$

для всех φ_1 и φ_2 таких, что $\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) = 0$, если $(x_1 - x_2)^2 < 0$ в метрике Минковского. Такие φ_1 и φ_2 называются функциями с пространственноподобно разделенными носителями и этот факт в дальнейшем будем записывать в виде $\varphi_1 \sim \varphi_2$.

В теории квантованного поля свойство (1), называемое аксиомой локальной коммутативности, отражает важный физический факт: конечность скорости распространения сигнала. Несмотря, однако, на важность этой аксиомы, содержательных примеров полей, обладающих свойством (1), почти нет. В частности, свободное и обобщенное свободное поля удовлетворяют (1) в значительно более сильном смысле. А именно, операторы рождения (а также операторы уничтожения) коммутируют независимо от расположения носителей функций φ_1 и φ_2. С физической точки зрения этот факт можно рассматривать как причину тривиальности этих полей. Это следует из того, что в нетривиальной теории рождение (либо уничтожение) двух частиц во времениподобных по отношению друг к другу областях пространства не является перестановочной операцией.

В данной работе обобщаем конструкцию свободного поля таким образом, чтобы аналоги операторов рождения (а также аналоги операторов уничтожения) не коммутировали на времениподобных расстояниях.

Заметим, что в отличие от работ [4, 5], в которых также делались попытки обобщить конструкцию свободного поля, строящееся здесь поле операторов удовлетворяет условию (1) в полном, а не в ослабленном смысле.

2. Существенную роль в предлагаемых ниже построениях играет понятие пространственноподобно симметрической функции, а также оператор пространственноподобного симметрирования функций. Эти объекты подробно изучены в работах [4, 5]. Поэтому здесь лишь кратко напомним основные определения.

Ниже точку $(x_1, \ldots, x_n) \in \underbrace{M^4 \times \ldots \times M^4}_{n}$ обозначаем через $\underline{x}^n$.

Сопоставим каждой точке $\underline{x}^n$ семейство перестановок $I(\underline{x}^n)$ множества $(x_1, \ldots, x_n)$. По определению, перестановка $\pi \in I(\underline{x}^n)$, если она может быть представлена произведением транспозиций ($\pi = \tau_k \ldots \tau_1$) таких, что $\tau_1 \in I(\underline{x}^n), \ldots, \tau_k \in I(\tau_{k-1} \ldots \tau_1 \underline{x}^n)$, где каждая транспозиция τ_{j+1} ($j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, k-1$) переставляет в множестве $(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) = \tau_j \ldots \tau_1 \underline{x}^n$ какие-нибудь две соседние точки, например x_{j_r} и $x_{j_{r+1}}$, причем такие, что $(x_{j_r} - x_{j_{r+1}})^2 < 0$.

Всюду определенная функция $u_n(\underline{x}^n)$ называется пространственноподобно симметрической, если $u_n(\underline{x}^n) = u_n(\pi \underline{x}^n)$ для любой $\pi \in I(\underline{x}^n)$ или, что эквивалентно, если $u_n(x_1, \ldots, x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n) = u_n(x_1, \ldots, x_{j+1}, x_j, \ldots$ $\ldots, x_n)$ при $(x_j - x_{j+1})^2 < 0$ ($j = 1, \ldots, n-1$).

Обозначим через L_2^n ($n = 1, 2, \ldots$) пространство суммируемых с квадратом функций $u_n(\underline{x}^n)$. Зададим на всюду определенных функциях из L_2^n оператор пространственноподобного симметрирования посредством следующей формулы:

$$(P_c^n u_n)(\underline{x}^n) = \frac{1}{\rho_n(\underline{x}^n)} \sum_{\alpha=1}^{n!} a(\pi_\alpha; \underline{x}^n)\, u_n(\pi_\alpha \underline{x}^n), \tag{2}$$

где

$$a(\pi_\alpha; \underline{x}^n) = \begin{cases} 1, & \pi_\alpha \in I(\underline{x}^n), \\ 0, & \pi_\alpha \,\overline{\in}\, I(\underline{x}^n) \end{cases}$$

и

$$\rho_n(\underline{x}^n) = \sum_{\alpha=1}^{n!} a(\pi_\alpha; \underline{x}^n).$$

В работе [4] показано, что оператор P_c^n является ортопроектором в L_2^n.

3. Введем пространство

$$L_c = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} L_c^n,$$

где $L_c^0 \equiv \mathbf{C}$ — поле комплексных чисел, $L_c^1 \equiv L_2^1$, а при $n > 1$ $L_c^n = P_c^n L_2^n$. Это пространство обобщает пространство Фока в том смысле, что каждое подпространство L_c^n включает в себя все полностью симметрические функции из L_2^n. Таким образом, общее пространство Фока

$$L_s = \oplus \sum_{n=0}^{\infty} L_s^n$$

($L_s^0 \equiv \mathbf{C}$, $L_s^1 \equiv L_2^1$, $L_s^n = P_s^n L_2^n$; P_s^n — проектор на подпространство симметрических функций в L_2^n ($n > 1$)) является подпространством в L_c.

Векторы из L_c записываем в виде ($u = u_0, u_1, \ldots$). Обозначим через F множество финитных последовательностей $(u_0, u_1, \ldots)$. Понятно, что F плотно в L_c.

Определим на F для каждой основной функции $\varphi \in S$ оператор $A_+(\varphi)$ следующим образом:

$$(A_+(\varphi)\, u)_n(\underline{x}^n) = \sqrt{\rho_n(\underline{x}^n)}\, P_c^n \left(\varphi(x_1) \frac{u_{n-1}(x_2, \ldots, x_n)}{\sqrt{\rho_{n-1}(x_2, \ldots, x_n)}} \right). \tag{3}$$

Сужение на F эрмитово сопряженного к $A_+(\overline{\varphi})$ оператора ($\overline{\varphi}$ — функция комплексно-сопряженная к φ) обозначим через $A_-(\varphi)$. Легко проверить, что оператор $A_-(\varphi)$ действует согласно формуле

$$(A_-(\varphi)u)_{n-1}(\underline{x}^{n-1}) = \frac{1}{\sqrt{\rho_{n-1}(x_2, \ldots, x_n)}} \int\limits_{M^4} dx_1 \varphi(x_1) \sqrt{\rho_n(\underline{x}^n)}\, u_n(\underline{x}^n). \qquad (4)$$

Отметим, что если в формулах (3) и (4) положить $\rho_k = k!$ $(k = n, n-1)$, $u_k \in L_s^k$, а P_c^n заменить на P_s^n, то операторы $A_+(\varphi)$ и $A_-(\varphi)$ станут обычными операторами рождения и уничтожения, действующими в общем пространстве Фока L_s. Таким образом, эрмитово поле операторов $A(\varphi) = A_+(\varphi) + A_-(\varphi)$ (эрмитовость означает, что $A^*(\varphi) = A(\overline{\varphi})$) в определенном смысле обобщает конструкцию свободного поля.

4. В следующих теоремах сформулированы основные результаты данной работы.

Теорема 1. *Если $\varphi_1, \varphi_2 \in S$ таковы, что $\varphi_1 \sim \varphi_2$, то*

$$[A_+(\varphi_1), A_+(\varphi_2)] = 0. \qquad (5)$$

Причем в отличие от свободного поля равенство (5) *не имеет места, если условие $\varphi_1 \sim \varphi_2$ не выполняется.*

Теорема 2. *Эрмитово поле операторов $A(\varphi) = A_+(\varphi) + A_-(\varphi)$ локально коммутативно.*

Теорема 1 доказывается довольно просто, исходя из равенств (2) и (3). Существенным моментом теоремы 2 является установление равенства

$$[A_-(\varphi_1), A_+(\varphi_2)] = 0 \quad (\varphi_1 \sim \varphi_2). \qquad (6)$$

Доказательство равенства (6) не тривиально и громоздко. Оно сводится к проверке следующего соотношения $(n = 1, 2, \ldots)$:

$$A_-(\psi_1) A_+(\varphi_1) \ldots A_+(\varphi_n)\Omega = A_+(\varphi_1) A_-(\psi_1) A_+(\varphi_2) \ldots A_+(\varphi_n)\Omega, \qquad (7)$$

где $\Omega = (1, 0, 0, \ldots)$, $\varphi_1 \sim \psi_1$, а $\varphi_2, \ldots, \varphi_n \in S$ произвольны.

Обозначая левую часть равенства (7) через $\Phi_n(\psi_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ и пользуясь формулами (2) — (4), можно показать, что

$$\Phi_n(\psi_1, \varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \sum_{j=1}^{n} \sqrt{\rho_{n-1}(x_2, \ldots, x_n)}\, P_c^{n-1} \int\limits_{M_j(x_2, \ldots, x_n)} dx_1 \psi_1(x_1)\varphi_j(x_1)(\varphi_1 \ldots$$

$$\ldots \hat{\varphi}_j \ldots \varphi_n)(x_2, \ldots, x_n), \qquad (8)$$

где $\wedge$ указывает на пропуск величины, а множество

$$M_j(x_2, \ldots, x_n) = \{x \in M^4 \mid (x - x_k)^2 < 0, \quad k = 2, \ldots, j-1\}.$$

Аналогичным образом убеждаемся, что правая часть равенства (7) (обозначим ее через $A_+(\varphi_1)\Phi_{n-1}(\psi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$) может быть приведена к виду:

$$A_+(\varphi_1)\Phi_{n-1}(\psi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{\rho_{n-1}(x_2, \ldots, x_n)}\, P_c^{n-1} \int\limits_{M_j(x_3, \ldots, x_n)} dx_1 \psi_1(x_1)\varphi_{j+1}(x_1)(\varphi_1 \ldots$$

$$\ldots \hat{\varphi}_{j+1} \ldots \varphi_n)(x_2, \ldots, x_n). \qquad (9)$$

Учтем теперь тот факт, что $\varphi_1 \sim \psi_1$. В соотношении (8) это приводит к равенству нулю первого слагаемого. А в соотношении (9) позволяет заменить множество $M_j(x_3, \ldots, x_n)$ на $M_j(x_2, \ldots, x_n)$ без изменения значения всего выражения. После таких преобразований равенство правых частей соотношений (8) и (9) становится очевидным.

5. В пространстве L_c естественным образом вводится унитарное представление $U(a, \Lambda)$ группы Пуанкаре $P_+^{\uparrow}$, относительно которого поле $A(\varphi)$ преобразуется по закону:

$$U(a, \Lambda) A(\varphi) U^{-1}(a, \Lambda) = A(\varphi_{(a,\Lambda)}),$$

где $\varphi_{(a,\Lambda)}(x) = \varphi(\Lambda^{-1}(x - a))$. Кроме того, нетрудно убедиться, что вектор Ω является циклическим относительно кольца операторов, порожденного полем $A(\varphi)$ $(\varphi \in S)$. Понятно также, что зависимость операторной функции $A(\varphi)$ от φ удовлетворяет всем требованиям аксиоматической теории поля [1—3]. Непроверенной осталась лишь одна аксиома спектральности. Ее учет представляется довольно трудной, но в принципе разрешимой в данном случае задачей.

В заключение автор выражает благодарность Ю. М. Березанскому за проявленный интерес к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. Стритер, А. С. Вайтман, PCT, спин и статистика и все такое, «Наука», М., 1966.
2. Р. Йост, Общая теория квантованных полей, «Мир», М., 1967.
3. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, «Наука», М., 1969.
4. В. Д. Кошманенко, Ослабленная аксиома локальной коммутативности, УМЖ, т. 22, № 2, 1970.
5. В. Д. Кошманенко, Операторные якобиевы матрицы в аксиоматической теории поля, сб. Методы функционального анализа в задачах математической физики, Изд. Института математики АН УССР, К., 1971.

Поступила 22.VI 1972 г.
Институт математики АН УССР