УДК 517.544.3:517.947.43

Интегрирование нелинейной смешанной краевой задачи в частных производных

В. Л. Кульчицкий

1. В работе [1] описана математическая модель задачи определения температурного поля тел, подверженных на части своей поверхности тепловому удару, т. е. сильному кратковременному тепловому воздействию. Тепловому удару подвергаются, например, поверхности тел при индукционном нагреве, поверхности тел, входящих на большой скорости в атмосферу Земли. Получение решения этой задачи в виде пригодном для численных расчетов даже в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций встречает ряд трудностей, так как при разложении функции Грина в ряд по неортогональным собственным функциям несамосопряженной задачи коэффициенты ряда приходится искать из матрицы бесконечного порядка. В [1] задача определения температурного поля тел, подверженных тепловому удару, сводится к задаче Коши в некотором гильбертовом пространстве с неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором. Решение находится в виде ряда Фурье по полной ортонормальной системе собственных функций самосопряженного оператора.

2. Рассмотрим частный случай отрезка $[-h, 0]$, один из концов которого подвергается тепловому удару. Согласно [1] рассмотрим следующую нелинейную смешанную краевую задачу:

$$\frac{\partial u(x_0, t)}{\partial t} = a_0 \frac{\partial^2 u(x_0, t)}{\partial x_0^2} + f(x_0, t), \ x_0 \in (-h, 0), \ t \in [0, T],$$

$$\frac{\partial u(x_1, t)}{\partial t} = -a_1 \frac{\partial u(x_1, t)}{\partial x_1} - \sigma u(x_1, t) + f_1(u(x_1, t)), \ x_1 = 0, \ t \in [0, T], \qquad (1)$$

$$u(x, t)|_{x=-h} = 0, \ u(x, 0) = u_0, \ x \in (-h, 0],$$

где через x_0 обозначена координата внутренних точек отрезка, а через x_1 — конец отрезка, подверженный тепловому удару; a_0, a_1, σ — некоторые постоянные, зависящие от свойств материала и физики процесса.

Задача (1) приводится к задаче Коши [1]

$$\gamma \frac{dU(x, t)}{dt} = -AU(x, t) + F(x, t, U), \ U(x, 0) = u_0, \qquad (2)$$

рассматриваемой в ортогональной сумме гильбертовых пространств $L^2 = L_{2(-h,0)} \oplus R_1$ для дифференциального уравнения первого порядка с неограниченным положительно определенным самосопряженным оператором A. Здесь

$$U(x, t) = \begin{bmatrix} u(x_0, t) \\ u(x_1, t) \end{bmatrix}, \ u(x_0, t) \in L_{2(-h,0)}, \ u(x_1, t) \in R_1,$$

$$F(x, t, U) = \begin{bmatrix} f(x_0, t) \\ f_1(u(x_1, t)) \end{bmatrix}, \ f(x_0, t) \in L_{2(-h,0)}, \ f_1(u(x_1, t)) \in R_1$$

рассматриваются как непрерывные функции t со значениями в L^2, а

$$\gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_0} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1} \end{bmatrix}.$$

В [1] показано, что задача (2) имеет единственное обобщенное решение.

Собственные функции оператора A образуют полную ортонормальную систему в пространстве L^2 с весом γ и имеют вид

$$X_k(x) = \begin{bmatrix} X_k(x_0) \\ X_k(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_k \sin\sqrt{\frac{\lambda_k}{a_0}}(x_0 + h) \\ A_k \sin\sqrt{\frac{\lambda_k}{a_0}}(x_1 + h) \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Наложение граничных условий приводит к трансцендентному уравнению для собственных значений

$$\operatorname{tg}\sqrt{\frac{\lambda_k}{a_0}}\, h = -\frac{\sqrt{\frac{\lambda_k}{a_0}}}{\sigma - \frac{\lambda_k}{a_1}}. \qquad (4)$$

Условие нормировки (с весом γ) дает нам выражение для «амплитуды» A_k

$$A_k = \frac{\sqrt{2a_0}}{\sqrt{h + \frac{\sigma + \frac{\lambda_k}{a_1}}{\left(\sigma - \frac{\lambda_k}{a_1}\right)^2} \cos^2\sqrt{\frac{\lambda_k}{a_0}}\, h}}. \qquad (5)$$

Функции X_k и X_m при $k \neq m$ ортогональны (с весом γ), так как нетрудно показать, что

$$\frac{A_k A_m}{a_0} \int\limits_{-h}^{0} \sin \sqrt{\frac{\lambda_k}{a_0}} (x_0 + h) \sin \sqrt{\frac{\lambda_m}{a_0}} (x_0 + h)\, dx_0 + \\ + \frac{A_k A_m}{a_1} \sin \sqrt{\frac{\lambda_k}{a_0}} h \sin \sqrt{\frac{\lambda_m}{a_0}} h = 0.$$

Решение задачи (2) представим в виде

$$U(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x_0) \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x_1) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Функции $T_k(t)$ можно получить из выражения

$$T_k(t) = a_k e^{-\lambda_k t} + \int\limits_0^t c_k(\tau) e^{-\lambda_k (t-\tau)} d\tau, \tag{7}$$

где $a_k = T_k(0) = (u_0, X_k)_\gamma$, $c_k(t) = (F(x, t, U), X_k)$.
Запишем формулы для a_k и c_k:

$$a_k = \frac{A_k u_0}{\sqrt{\lambda_k a_0}} \left[1 - \frac{\sigma}{\sigma - \frac{\lambda_k}{a_1}} \cos \sqrt{\frac{\lambda_k}{a_0}} h \right],$$

$$c_k(t) = \int\limits_{-h}^{0} f(x_0, t) X_k(x_0)\, dx_0 + f_1(u(0, t)) X_k(0).$$

Легко показать, что ряд (6), представляющий решение задачи, сходится в L^2 равномерно по t в $[0, \infty)$. В самом деле, при $k \to \infty$ $\lambda_k \to a_0 \left(\frac{\pi}{h}\right)^2 k^2$, $A_k \to \sqrt{\frac{2a_0}{h}}$ и

$$X_k(x) \to \begin{bmatrix} (-1)^k \sqrt{\frac{2a_0}{h}} \sin \frac{k\pi x_0}{h} \\ (-1)^k \frac{1}{k} \end{bmatrix}.$$

Из асимптотических оценок [2] следует, что при $k \to \infty$ $c_k(t) \to \frac{1}{k}$, т. е. $T_k(t)$ стремится к нулю не слабее, чем $\frac{1}{k}$. Таким образом,

$$U(x, t) = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(x_0) \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(0) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin k\pi \left(\frac{x_0 + h}{h}\right)}{k} \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi}{2h} x_0 \\ \zeta(2) \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Тем самым доказано, что предельная функция принадлежит L^2.

3. Пусть $\overline{G} = G \bigcup S$ — изотропный однородный круглый цилиндр единичного радиуса и высотой h. Боковую поверхность цилиндра обозначим через Γ_1, а торцы цилиндра—через Γ_2, т. е. $S = \Gamma_1 \bigcup \Gamma_2$. Внутренние точки цилиндра G с координатами x, y, z будем обозначать через x_0, а точки поверхности Γ_1—через x_1. В области $\overline{G}$ рассматриваем краевую задачу (см. п. 2)

$$\frac{\partial u(x_0, t)}{\partial t} = a_0 \Delta u(x_0, t) + f(x_0, t), \ x_0 \in G, \ t \in [0, T],$$

$$\frac{\partial u(x_1, t)}{\partial t} = -a_1 \frac{\partial u(x_1, t)}{\partial n} + f_1(u(x_1, t)), \ x_1 \in \Gamma_1, \ t \in [0, T], \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial n}\right|_{\Gamma_2} = 0, \ u(x, 0) = u_0, \ x \in GU\Gamma_1,$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_0^2}$; $\frac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали. Собственные функции оператора A, соответствующего задаче (9), имеют вид

$$X_k(r, \varphi, z) = \begin{bmatrix} B_k I_m(\varkappa_k r) \cos \frac{n\pi z}{h} & \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \\ B_k I_m(\varkappa_k) \cos \frac{n\pi z}{h} & \begin{matrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{matrix} \end{bmatrix}, \tag{10}$$

где $m, n = 0, 1, 2, \ldots$, а под индексом k следует понимать три индекса m, n, s; $I_m(\varkappa_k r)$ — функция Бесселя первого рода. Собственные функции X_k двукратно вырождены по m. Собственные значения находятся из уравнения

$$\frac{I_m'(\varkappa_k)}{I_m(\varkappa_k)} = \frac{a_0}{a_1} \frac{\varkappa_k^2 + \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2}{\varkappa_k}. \tag{11}$$

Из (10) видно, что при $\lambda_k = 0$ $X_k = \text{const}$. Замкнутое множество этих констант обозначим через M. В гильбертовом пространстве $L^2 \ominus M = L_{2(G)} \oplus L_{2(\Gamma_1)} \ominus M$ оператор A положительно определенный и из результатов работы [1] следует, что в $L^2 \ominus M$ существует единственное обобщенное решение задачи (9).

Произвольную постоянную B_k находим из условия нормировки

$$(X_k, X_{k'})_\gamma = (\gamma X_k, X_{k'}) = \delta_{kk'}, \ k = (m, n, s), \ k' = (m', n', s').$$

Получаем

$$B_k^{-2} = \frac{\pi h}{4a_0} \varepsilon_n \varepsilon_m I_m^2(\varkappa_k) \left[\left(1 + 2\frac{a_0}{a_1}\right) - \frac{1}{\varkappa_k^2}\left(m^2 - \frac{a_0^2}{a_1^2} \nu^4\right)\right], \ \varepsilon_0 = 2, \ \varepsilon_n = 1$$

$$\text{при} \quad n = 1, 2, \ldots, \nu = \sqrt{\frac{\lambda_k}{a_0}}. \tag{12}$$

При $k \neq k'$ $(X_k, X_{k'})_\gamma = 0$. В самом деле, при $n \neq n'$ и $m \neq m'$ равенство $(X_k, X_{k'})_\gamma = 0$ очевидно, а при $n = n'$, $m = m'$ и $s \neq s'$ принимает вид

$$\frac{1}{a_0} \int_0^1 I_m(\varkappa_k r) I_m(\varkappa_{k'} r) r dr + \frac{1}{a_1} I_m(\varkappa_k) I_m(\varkappa_{k'}) = 0.$$

После некоторых преобразований, используя равенство (11), приходим к тождеству.

Тем самым показано, что собственные функции оператора A в задаче (9) ортонормальны в L^2 с весом γ. Таким образом, решение задачи (9) можно представить в виде ряда

$$U(x, t) = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(r, \varphi, z) \\ \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t) X_k(1, \varphi, z) \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Здесь $T_k(t)$ определяются из выражения (7).

Равномерную сходимость по t ряда (13) можно показать так же, как это сделано в более простом случае п. 2.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Кульчицкий, Математическая постановка и качественное исследование задачи индукционного нагрева, Краевые задачи математической физики, Изд. Ин-та математики АН УССР, 1971.
2. Э. Копсон, Асимптотические разложения, «Мир», М., 1966.

Поступила 13.XII 1972 г.

Институт математики АН УССР