УДК 517.948:513.88

Об операторных и интегральных неравенствах

Н. С. Курпель, Б. А. Шувар

В данной статье устанавливаются некоторые общие теоремы о двусторонних операторных неравенствах и иллюстрируется их применение для доказательства некоторых интегральных неравенств.

1. Пусть E — полуупорядоченное пространство, в котором введено понятие сходимости в некотором смысле. Рассмотрим уравнение

$$x = T(x, x), \tag{1}$$

где $T(u, v)$ — оператор, действующий из $E \times E$ в E.

Пусть оператор $T(u, v)$ такой, что

$$T(u, v) \leqslant T(y, z), \text{ если } u \leqslant y, \ v \geqslant z \ (u, v, y, z \in E). \tag{2}$$

Наряду с (1) будем рассматривать также систему

$$\begin{aligned} y &= T(y, z), \\ z &= T(z, y). \end{aligned} \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:* 1) *для некоторых элементов* $u, v \in E$ *имеют место соотношения*

$$u \leqslant T(u, v), \quad v \geqslant T(v, u); \tag{4}$$

2) *процесс последовательных приближений, построенных по формулам*

$$y_0 = u, \ z_0 = v, \tag{5}$$

$$y_{n+1} = T(y_n, z_n), \ z_{n+1} = T(z_n, y_n) \ (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{6}$$

сходится в смысле сходимости в E к решению (y^*, z^*) системы (3); 3) *решение системы* (3) *единственно и* $y^* = z^*$.

Тогда для решения x^* уравнения (1) *имеют место оценки*

$$u \leqslant x^* \leqslant v. \tag{7}$$

Доказательство. Используя (6), (5) и (4), получаем

$$y_1 = T(y_0, z_0) = T(u, v) \geqslant u, \quad z_1 = T(z_0, y_0) = T(v, u) \leqslant v. \tag{8}$$

Покажем, что из неравенств $y_n \geqslant u$, $z_n \leqslant v$ вытекают неравенства $y_{n+1} \geqslant u$ $z_{n+1} \leqslant v$. В самом деле, имеем

$$y_{n+1} = T(y_n, z_n) \geqslant T(u, v) \geqslant u, \quad z_{n+1} = T(z_n, y_n) \leqslant T(v, u) \leqslant v.$$

Таким образом,

$$y_n \geqslant u, \quad z_n \leqslant v \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{9}$$

Из условия 3) теоремы 1 следует, что уравнение (1) имеет единственное решение x^*, причем $x^* = y^* = z^*$. Поскольку из (9) вытекает, что $y^* \geqslant u$, $z^* \leqslant v$, то имеем $u \leqslant x^* \leqslant v$.

Условия теоремы дают возможность доказать несколько более сильное утверждение.

Следствие. *При условиях* 1) — 3) *теоремы* 1 *верны оценки*

$$y_n \leqslant x^* \leqslant z_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Действительно, из (5) и (8) имеем $y_1 \geqslant y_0$, $z_1 \leqslant z_0$. Предполагая, что $y_n \geqslant y_{n-1}$, $z_n \leqslant z_{n-1}$, при помощи (6) и (4) находим

$$y_{n+1} = T(y_n, z_n) \geqslant T(y_{n-1}, z_{n-1}) = y_n, \quad z_{n+1} = T(z_n, y_n) \leqslant T(z_{n-1}, y_{n-1}) = z^n \tag{11}$$

Таким образом, последовательные приближения $\{y_n\}$ монотонно не убывают, а $\{z_n\}$ монотонно не возрастают при всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ В частности, из (11) имеем

$$y_n \leqslant T(y_n, z_n), \quad z_n \geqslant T(z_n, y_n). \tag{12}$$

Применяя к элементам y_n, $z_n \in E$ на основании (12) те же рассуждения, что и к элементам u, v, получим (10).

Дальше под сходимостью в нормированном пространстве будем понимать сходимость по норме.

Условия 2), 3) теоремы 1 выполняются, например, в случае, когда E — пространство Банаха и для всех $x, y, z, t \in E$ имеет место неравенство $\| T(x, y) - T(z, t) \| \leqslant q_1 \| x - z \| + q_2 \| y - t \|$, причем $q_1 + q_2 < 1$.

Рассмотрим случай, когда оператор $T(u, v)$ имеет вид $T(u, v) = A_1 u - A_2 v + f$, где A_1, A_2 — линейные положительные операторы, действующие из E в E (E — пространство Банаха), $f \in E$.

Пусть спектральные радиусы $\rho(A_1 - A_2)$ и $\rho(A_1 + A_2)$ соответственно операторов $A_1 - A_2$ и $A_1 + A_2$ удовлетворяют неравенствам $\rho(A_1 - A_2) < 1$, $\rho(A_1 + A_2) < 1$. Тогда, если $u, v \in E$ удовлетворяют системе (4), то система (3), как нетрудно видеть, имеет единственное решение (y^*, z^*) такое, что $y_n \uparrow y^*$, $z_n \downarrow z^*$ и $y^* = z^*$, т. е. выполняются условия 2), 3) теоремы 1. Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если $\rho(A_1 - A_2) < 1$, $\rho(A_1 + A_2) < 1$ и существуют элементы u, $v \in E$, удовлетворяющие неравенствам*

$$u \leqslant A_1 u - A_2 v + f, \quad v \geqslant A_1 v - A_2 u + f,$$

то верны оценки (7) *для решения уравнения*

$$x = Ax + f,$$

где $A = A_1 - A_2$.

Положив $A_2 = \theta$, получим отсюда утверждение, приведенное в [1, гл. I, § 9, теорема 9.3].

Теорема 1 является частным случаем более общего утверждения. Будем предполагать, что оператор $T(u, v)$ действует из $E_1 \times E_1$ в E_1, где E_1 — некоторое множество пространства E.

Крайним в E_1 решением системы (3) будем называть (см. [2, гл. V, § 1]) такое решение (y^*, z^*) $(y^* \leqslant z^*,\ y^*, z^* \in E_1)$, что любое другое решение (u, v) $(u, v \in E_1)$ системы (3) удовлетворяет соотношениям $y^* \leqslant u \leqslant z^*$, $y^* \leqslant v \leqslant z^*$.

Теорема 3. *Пусть*: 1) *существуют такие* $u, v \in E_1$, *что верны соотношения* (4); 2) *процесс последовательных приближений* (5), (6) *сходится к крайнему в* E_1 *решению* (y^*, z^*) *системы* (3).

Тогда для любого решения $x^* \in E_1$ *уравнения* (1) *имеем*

$$u \leqslant x^* \leqslant v.$$

Для доказательства можно применить рассуждения, аналогичные тем, которые применялись при доказательстве теоремы 1, учитывая при этом, что если x^* — решение уравнения (1), то (x^*, x^*) — решение системы (3).

Достаточные условия существования крайнего решения для случая, когда E_1 — правильно полуупорядоченное множество с наименьшим и наибольшим элементами, установлены в [2, лемма 5.1].

2. Рассмотрим некоторые применения доказанных теорем.

А. Пусть дано уравнение типа Вольтерра

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(t, s, x(s))\, ds + \varphi(t) \quad (t, s \in [t_0, t_1], -\infty < t_0 < t_1 < \infty), \tag{13}$$

где $f(t, s, x(s))$ такой оператор, что оператор $\int_{t_0}^{t} f(t, s, x(s))\, ds + \varphi(t)$ действует из E в E, E — некоторое пространство Банаха.

Допустим, что возможно представление $f(t, s, x(s)) = F(t, s, x(s), x(s))$ такое, что $F(t, s, u(s), v(s)) \leqslant F(t, s, y(s), z(s))$ при $u(s) \leqslant y(s)$, $v(s) \geqslant z(s)$ $(u(s), v(s), y(s), z(s) \in E)$. Тогда оператор $T(x, x) = \int_{t_0}^{t} F(t, s, x(s), x(s))\, ds + \varphi(t)$ удовлетворяет условию (2), а система (3) имеет вид

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} F(t, s, y(s), z(s))\, ds + \varphi(t), \qquad z(t) = \int_{t_0}^{t} F(t, s, z(s), y(s))\, ds + \varphi(t). \tag{14}$$

Если выполняются условия теоремы 3, то для решения $x^*(t)$ уравнения (13) справедливы оценки

$$u(t) \leqslant x^*(t) \leqslant v(t). \tag{15}$$

Заметим, что при других предположениях, преимущественно для случая монотонного оператора Вольтерра, интегральные неравенства исследовались многими авторами (см., например, [3, 4]).

Пусть, в частности, оператор в правой части (13) имеет вид

$$T(x) = c + \int_{t_0}^{t} f(s)\, \Phi(x(s))\, ds,$$

где $c = \text{const}$, $f(s) \geqslant 0$, $\Phi(z)$ принимает только положительные или только отрицательные значения при $z_1 < z < z_2$ $(z_1 \geqslant -\infty,\ z_2 \leqslant \infty)$, причем $\Phi(x(s)) = \varphi(x(s), x(s))$ и $\varphi(u(s), v(s)) \leqslant \varphi(y(s), z(s))$ при $u(s) \leqslant y(s)$, $v(s) \geqslant z(s)$. Если $\Psi(z_1 + 0) < \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, ds < \Psi(z_2 - 0)$, где $\Psi(z) = \int\limits_{c}^{z} \frac{du}{\Phi(u)}$, то для решения $x^*(t)$ уравнения

$$x(t) = c + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, \Phi(x(s))\, ds, \tag{16}$$

которое имеет вид $x^*(t) = \Psi^{-1}\left[\int\limits_{t_0}^{t} f(s)\, ds\right]$, где $\Psi^{-1}(z)$ — функция, обратная к $\Psi(z)$, при выполнении условий теоремы 1 справедливы соотношения (15).

Последнее утверждение представляет собой некоторый аналог леммы Бихари (см., например, [5]).

Б. Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра

$$x(t) = f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K(t, s)\, x(s)\, ds \tag{17}$$

на отрезке $[t_0,\ t_1]$ $(-\infty < t_0 < t_1 < \infty)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия:* 1) *функции* $f(t)$ *и* $K(t, s)$ *интегрируемы с квадратом соответственно в областях* $[t_0,\ t_1]$ *и* $[t_0,\ t_1] \times [t_0,\ t_1]$; 2) *существуют такие две функции* $u(t)$, $v(t) \in L_2[t_0,\ t_1]$, *что справедливы неравенства*

$$u(t) \leqslant f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K_+(t, s)\, u(s)\, ds - \int\limits_{t_0}^{t} K_-(t, s)\, v(s)\, ds,$$

$$v(t) \geqslant f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K_+(t, s)\, v(s)\, ds - \int\limits_{t_0}^{t} K_-(t, s)\, u(s)\, ds,$$

где $K_+(t, s) = \sup\{K(t, s), 0\}$, $K_-(t, s) = |K(t, s)| - K_+(t, s)$.

Тогда для решения $x^*(t)$ *уравнения* (17) *имеют место оценки* (15).

Для доказательства достаточно заметить, что условие 1) теоремы 4, как известно, гарантирует существование и единственность решения $x^*(t) \in L_2[t_0,\ t_1]$ уравнения (17) и что, как нетрудно видеть, система

$$\begin{aligned} y(t) &= f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K_+(t, s)\, y(s)\, ds - \int\limits_{t_0}^{t} K_-(t, s)\, z(s)\, ds, \\ z(t) &= f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} K_+(t, s)\, z(s)\, ds - \int\limits_{t_0}^{t} K_-(t, s)\, y(s)\, ds \end{aligned} \tag{18}$$

имеет единственное решение $(y^*(t),\ z^*(t))$ такое, что $y^*(t) = z^*(t)$ и последовательные приближения (5), (6) сходятся к этому решению.

Если система (18) имеет вид

$$y(t) = f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(t)\, \psi(s)\, y(s)\, ds - \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(t)\, \psi_1(s)\, z(s)\, ds,$$

$$z(t) = f(t) + \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(t)\, \psi(s)\, z(s)\, ds - \int\limits_{t_0}^{t} \varphi(t)\, \psi_1(s)\, y(s)\, ds,$$

где $\varphi(t) \geqslant 0$, $\psi(t) \geqslant 0$, $\psi_1(t) \geqslant 0$, то имеем оценки

$$u(t) \leqslant f(t) + \varphi(t) \int_{t_0}^{t} f(s)\,[\psi(s) - \psi_1(s)]\, e^{\int_s^t \varphi(y)[\psi(y) - \psi_1(y)]\,dy}\, ds \leqslant v(t). \tag{19}$$

В случае $\psi_1(t) = 0$ соотношения (19) принимают вид

$$u(t) \leqslant f(t) + \varphi(t) \int_{t_0}^{t} f(s)\,\psi(s)\, e^{\int_s^t \varphi(y)\psi(y)\,dy}\, ds \leqslant v(t), \tag{20}$$

т. е. имеем известное обобщение леммы Гронуолла — Беллмана. Положив $f(t) = c = \mathrm{const}$, $\varphi(t) = 1$, $\psi_1(t) = 0$, можно получить и саму лемму Гронуолла — Беллмана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве, «Наука», М., 1970.
2. Н. С. Курпель, Некоторые общие приближенные методы решения линейных и нелинейных операторных уравнений и их применения, Автореферат докт. дисс., Ин-т математики АН УССР, К., 1970.
3. Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк, Об интегральных и дифференциальных неравенствах, Труды IV Всесоюзного математического съезда (1961 г.), т. 2, Л., 1964.
4. Н. В. Азбелев, З. Б. Цалюк, Об одном методе оценок решений уравнений, Волжский матем. сб., вып. 5, 1966.
5. Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», М., 1967.

Поступила 17.XII 1971 г.

Институт математики АН УССР