УДК 517.9+513.88

О краевых задачах для мультипликативно порожденного оператора квазидифференцирования

В. Я. Сикирявый

В заметках [1 и 2] введены операторы псевдосферического дифференцирования и квазидифференцирования и установлены некоторые достаточные условия разрешимости связанных с ними краевых задач. В данной заметке выделяется специальный класс операторов квазидифференцирования — мультипликативно порожденные операторы квазидифференцирования — и формулируются необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для уравнений типа Лапласа и Пуассона, а также достаточные условия разрешимости краевых задач для уравнений вида $LF = U(x, F)$.

Пусть B — метрическое пространство, G — ограниченная область в B и пусть на $\bar{G}$ ($\bar{G}$ — замыкание области G) задан непрерывный и ограниченный функционал $\rho(x)$ такой, что $\rho(x) > 0$ в G и $\rho(x) = 0$ на Γ, где Γ — граница области G. Обозначим через N_G подмножество в топологическом произведении $B \times R^1$, определенное соотношением: $N_G = \bigcup_{x\in\bar{G}} \{x\}\times[0, \rho(x)]$.

Предположим, что задано некоторое подкольцо $A(G)$ кольца $C(G)$ всех непрерывных и ограниченных на $\bar{G}$ функционалов. Пусть также для каждой точки $(x, t) \in N_G$ определен функционал $M_{x,t} : A(G) \to R^1$.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что на кольце $A(G)$ задано п о р о ж д а ю щ е е с е м е й с т в о (п. с.) ф у н к ц и о н а л о в, если кольцо $A(G)$ и двупараметрическое семейство функционалов $M_{x,t}$ удовлетворяют следующим условиям:

$1_{\text{п.с}}$) если $F_1, F_2 \in A(G)$, α, β — вещественные числа, то

$$M_{x,t}(\alpha F_1 + \beta F_2) = \alpha M_{x,t}F_1 + \beta M_{x,t}F_2;$$

$2_{\text{п.с}}$) если $F_1, F_2 \in A(G)$, то $M_{x,t}(F_1F_2) = (M_{x,t}F_1)(M_{x,t}F_2)$;

$3_{\text{п.с}}$) функционал $F(x) \equiv 1$ принадлежит кольцу $A(G)$;

$4_{\text{п.с}}$) существует функционал $X(x) \in A(G)$ такой, что $M_{x,t}X = X(x) + t$;

$5_{\text{п.с}}$) если $F \in A(G)$, то $M_{x,0}F = F(x)$;

$6_{\text{п.с}}$) если $F \in A(G)$, то определенный на N_G функционал $M_{x,t}F$ непрерывен и имеют место неравенства $\inf\limits_{x\in G} F(x) \leqslant M_{x,t}F \leqslant \sup\limits_{x\in\bar{G}} F(x)$;

$7_{\text{п.с}}$) кольцо $A(G)$ полно относительно нормы $\|F\| = \sup\limits_{x\in\bar{G}} |F(x)|$;

$8_{\text{п.с}}$) если $F \in A(G)$, то для любой точки $x \in \bar{G}$ имеют место неравенства $\inf\limits_{y\in\Gamma} F(y) \leqslant M_{x,\rho(x)}F \leqslant \sup\limits_{y\in\Gamma} F(y)$.

Положим теперь

$$LF(x) = \lim_{t\to 0} \frac{M_{x,t}F - F(x)}{t} = \left.\frac{\partial M_{x,t}F}{\partial t}\right|_{t=0}, \tag{1}$$

если предел существует. Обозначим через $A_1(G)$ совокупность тех функционалов F из $A(G)$, для которых выполнены условия:

$1_{\text{м.п}}$) функционал $M_{x,t}F$ при каждом $x \in G$ непрерывно дифференцируем по t;

$2_{\text{м.п}}$) функционал LF, определенный равенством (1), принадлежит кольцу $A(G)$;

$3_{\text{м.п}}$) имеет место равенство $\partial M_{x,t}F/\partial t = M_{x,t}(LF)$.

Тогда семейство функционалов $A_1(G)$ образует кольцо и справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Оператор L, определенный равенством* (1), *является оператором квазидифференцирования, согласованным с кольцом* $A_1(G)$.

Определение 2. Оператор L, определенный на кольце $A_1(G)$ равенством (1), назовем **мультипликативно порожденным (м. п.) оператором квазидифференцирования.**

Примеры. 1. Пусть $B = R^1$. Положим $G = (-a, a)$ и $\rho(x) = a^2 - x^2$. Тогда семейство функционалов, определенное равенством $M_{x,t}f = f(\sqrt{x^2+t})$, является порождающим семейством на кольце $C[-a, a]$. Поэтому оператор $L = d/d(x^2) = 1/2x \times d/dx$ является мультипликативно порожденным оператором квазидифференцирования (ср. пример 1 в [1]).

2. Средние Гато-Леви [3] образуют в сепарабельном гильбертовом пространстве порождающее семейство функционалов, а оператор Лапласа — Леви является мультипликативно порожденным оператором квазидифференцирования.

Рассмотрим теперь уравнение Лапласа с мультипликативно порожденным оператором квазидифференцирования

$$LF = 0 \text{ в } G \tag{2}$$

и присоединим к нему краевое условие

$$F = V \text{ на } \Gamma, \tag{3}$$

где $V \in A(G)$.

Теорема 2. *Для разрешимости краевой задачи* (2), (3) *необходимо и достаточно, чтобы функционал $M_{x,\varrho(x)}V$ являлся L-гармоническим. В этом случае решение существует единственно и имеет вид $F(x) = M_{x,\varrho(x)}V$.*

Рассмотрим теперь уравнение Пуассона

$$LF = U(x) \quad \text{в } G \tag{4}$$

с нулевым краевым условием

$$F = 0 \quad \text{на } \Gamma, \tag{5}$$

где $U \in A(G)$.

Теорема 3. *Для разрешимости краевой задачи* (4), (5) *необходимо и достаточно, чтобы функционал*

$$F(x) = -\int_0^{\varrho(x)} M_{x,t}U\,dt \tag{6}$$

принадлежал кольцу $A(G)$ и для любой точки $(x, t) \in N_G$ имело место равенство

$$M_{x,t}\left(-\int_0^{\varrho(x)} M_{x,\tau}U\,d\tau\right) = -\int_t^{\varrho(x)} M_{x,\tau}U\,d\tau.$$

В этом случае решение существует единственно и имеет вид (6).

Теперь из теорем 1 и 2 [1] и теоремы 2 [2] вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Если область G удовлетворяет L-условию, а функционалы U и V принадлежат кольцу $\bar{\alpha}(G)$ (см. [2]), то краевые задачи* (2), (3) *и* (4), (5) *разрешимы.*

Рассмотрим теперь следующую краевую задачу:

$$LF = U(x, F) \quad \text{в } G, \quad (7) \qquad F = V \quad \text{на } \Gamma. \tag{8}$$

Прежде всего предположим, что область G удовлетворяет L-условию, тогда функционал $\rho(x)$ имеет вид $\rho(x) = s(x) - X(x)$, где $s(x)$ — фундаментальный функционал области G.

Обозначим через $D(G)$ произвольное замкнутое по равномерной сходимости подкольцо кольца $A(G)$, удовлетворяющее условиям:

$1_д$) если $F \in D(G)$, то $M_{x,\varrho(x)}F$ — функционал, L-гармонический в области G, и $M_{x,\varrho(x)}F \in D(G)$;

$2_д$) если $F \in D(G)$, то функционал $\int\limits_0^{\varrho(x)} M_{x,\tau}F d\tau$ принадлежит кольцу $D(G)$ и имеет место равенство $M_{x,t}\left(\int\limits_0^{\varrho(x)} M_{x,\tau}F d\tau\right) = \int\limits_t^{\varrho(x)} M_{x,\tau}F d\tau$.

Из теорем 2—4 вытекает следующая теорема.

Теорема 5. *Кольцо $\mathfrak{a}$, являющееся замыканием по равномерной сходимости кольца полиномов от функционала $X(x)$ с L-гармоническими коэффициентами, удовлетворяет условиям $1_д$) и $2_д$).*

Поэтому можно присоединить к условиям $1_д$) и $2_д$), наложенным на кольцо $D(G)$, также условие:

$3_д$) кольцо $D(G)$ содержит функционал $X(x)$.

Рассмотрим в топологическом произведении $B \times R^1$ подмножество $\mathfrak{N}_G = \bigcup\limits_{x \in \bar{G}} \{x\} \times [X(x), s(x)]$ и поставим в соответствие каждому функционалу $F \in A(G)$ функционал $\widetilde{F}$, определенный на $\mathfrak{N}_G$ равенством $\widetilde{F}(x, w) = M_{x, w - X(x)}F$. Тогда при условиях, сформулированных в следующей ниже теореме 6, краевая задача (7), (8) эквивалентна краевой задаче

$$\frac{\partial \widetilde{F}(x, w)}{\partial w} = \widetilde{U}(x, w, \widetilde{F}), \quad (9) \qquad \widetilde{F}(x, s(x)) = \widetilde{V}(x, s(x)), \qquad (10)$$

которую назовем дуальной (д.) краевой задачей к краевой задаче (7), (8).

Теорема 6. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) *область G удовлетворяет L-условию;*

2) *функционал V принадлежит кольцу $D(G)$;*

3) *функционал $U(x, \tau)$ определен и непрерывен на топологическом произведении $\bar{G} \times R^1$ и удовлетворяет условию Липшица по τ:*

$$|U(x, \tau_1) - U(x, \tau_2)| \leqslant K |\tau_1 - \tau_2|,$$

где K — постоянная, фиксированная для всех $x \in G$ и любого конечного промежутка изменения τ;

4) *функционал $U(x, \tau)$ представим в виде предела по равномерной сходимости*

$$U(x, \tau) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{m_n} \Phi_{kn}(x) f_{kn}(\tau),$$

где $\Phi_{kn} \in D(G)$, а f_{kn} — непрерывные функции на R^1.

Тогда для разрешимости краевой задачи (7), (8) в кольце $D(G)$ необходимо и достаточно, чтобы дуальная краевая задача (9), (10) была разрешима в кольце всех непрерывных и ограниченных на $\mathfrak{N}_G$ функционалов; при этом решение краевой задачи (7), (8) единственно.

Теорема 7. *Если кроме условий 1) — 4) теоремы 6 выполнено также условие:*

5) *имеет место оценка*

$$|U(x, \tau)| \leqslant \psi(|\tau|),$$

где $\psi(u)$ — непрерывная и положительная на полупрямой $[0, \infty)$ функция *такая, что* $\int\limits_0^\infty \frac{du}{\psi(u)} = \infty$, *то краевая задача* (7), (8) *имеет и притом единственное решение в кольце* $D(G)$.

Аналогичным образом формулируются теоремы существования и единственности решения краевых задач для систем уравнений первого порядка и уравнений высшего порядка с мультипликативно порожденным оператором квазидифференцирования.

Поскольку полученные теоремы существования справедливы для мультипликативно порожденных операторов квазидифференцирования, то естественно возникает вопрос: при каких условиях произвольный оператор квазидифференцирования является мультипликативно порожденным? Частичный ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема 8. *Пусть* L — *произвольный оператор квазидифференцирования и область* G *удовлетворяет* L*-условию. Тогда на кольце* $\overline{\mathfrak{a}}\,(G)$ *можно определить порождающее семейство функционалов, а оператор* L *является мультипликативно порожденным оператором квазидифференцирования на кольце* $\overline{\mathfrak{a}}\,(G)$ (*кольцо* $\overline{\mathfrak{a}}\,(G)$ *есть замыкание по норме*

$$\| F \| = \sup_{x \in G} | F(x) | + \sup_{x \in G} | LF(x) |$$

кольца полиномов от функционала $X(x)$ *с* L*-гармоническими коэффициентами*).

Так как оператор Лапласа — Леви в сепарабельном гильбертовом пространстве и операторы в пространстве квадратично интегрируемых на (0, 1) вектор-функций, рассмотренные Е. М. Полищуком [4], являются мультипликативно порожденными операторами квазидифференцирования, то теоремы 2—4, 6 и 7 данной заметки позволяют уточнить результаты П. Леви [5], И. Я. Дорфман [3], Е. М. Полищука [4] и получить новые результаты в теории краевых задач для этих операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Я. Сикирявый, О решении краевых задач, связанных с оператором псевдосферического дифференцирования, УМН, т. 25, вып. 6, 1970.
2. В. Я. Сикирявый, К теории краевых задач для уравнений с оператором псевдосферического дифференцирования, УМН, т. 26, вып. 4, 1971.
3. И. Я. Дорфман, О средних и лапласиане функций на гильбертовом пространстве, Матем. сб., т. 81(128), вып. 2, 1970.
4. Е. М. Полищук, Континуальные средние и вопросы анализа в функциональных пространствах, Автореферат докт. дисс., М., 1969.
5. П. Леви, Конкретные проблемы функционального анализа, «Наука», М., 1967.

Поступила 24.IX 1971 г.
ВНИИПромгаз