УДК 517.946:519.21

Мультипликативные стохастические интегралы с операторными коэффициентами

Н. И. Тетерина

В [1] введено понятие мультипликативного стохастического интеграла (м. с. и.) с матричными коэффициентами, рассматривалась система линейных стохастических уравнений, решение которой представлялось с помощью м. с. и., а также исследовалось применение м. с. и. к представлению фундаментальных решений задачи Коши для систем параболических уравнений второго порядка в виде континуального интеграла. В данной заметке изучается м. с. и. с операторными коэффициентами.

1. Пусть $w_j(t) = w_j(t, \omega)$ $(t \geqslant 0; \omega \in \Omega; j = 1, \ldots, m)$ — попарно независимые одномерные винеровские процессы. Введем последовательность расширяющихся σ-алгебр $F_t \subset F$ в пространстве (Ω, F, P) таких, что случайные величины $w_j(t)$ F_t-измеримы, а их приращения $w_j(t+s) - w_j(t)$ не зависят от F_t при любых $t \geqslant 0$, $s > 0$, $j = 1, \ldots, m$:

$$F_t = \sigma\{w_j(\tau),\ \tau \in (0, t],\ j = 1, \ldots, m\}.$$

Пусть $a(t) = a(t, \omega)$ и $A_j(t) = A_j(t, \omega)$ $(j = 1, \ldots, m)$ — операторные случайные функции на $[t_0, T]$. Назовем интегральным произведением следующее выражение:

$$\pi_{t_0}^T(\Delta_n t; a, \mathfrak{A}) = \widehat{\prod_{i=0}^{n}} \exp\left\{a_i \Delta t_i + \sum_{j=1}^{m} A_{ji} \Delta w_{ji}\right\}, \tag{1}$$

где $\Delta_n t : 0 \leqslant t_0 < t_1 < \ldots < t_n < T = t_{n+1}$ — разбиение отрезка $[t_0, T]$ с диаметром $|\Delta_n t| = \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \Delta t_k$, $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$; $\Delta w_{jk} = w_j(t_{k+1}) - w_j(t_k)$; $a_i =$

$= a(t_i)$, $A_{ji} = A_j(t_i)$, $i = 0, \ldots, n$; $\mathfrak{A}$ обозначает всю совокупность функций A_j, а $\overset{\frown}{\prod_{i=0}^{n}}$ — что сомножители берутся в порядке убывания индексов.

Определение. Предел интегральных произведений (1), если он существует в каком-нибудь смысле при условии $|\Delta_n t| \to 0$, называется м. с. и. и обозначается так:

$$J_{t_0}^{T}(a; \mathfrak{A}) = \widehat{\exp} \int_{t_0}^{T} \{a(t)\, dt + (\mathfrak{A}(t), dw(t))\} = \lim_{|\Delta_n t| \to 0} \pi_{t_0}^{T}(\Delta_n t; a, \mathfrak{A}). \tag{2}$$

Под нормой операторной функции $B(t)$ будем понимать норму Гильберта—Шмидта:

$$\| B(t) \|_H = \sigma_2(B(t)) = \{\mathrm{Sp}\, B^*(t) B(t)\}^{\frac{1}{2}}.$$

Будем говорить, что для функций $a(t)$ и $A_j(t)$ выполняются услови (А), если:

1) для всякого $t \in [t_0, T]$ $a(t)$ и $A_j(t)$ являются операторами Гильберта—Шмидта в гильбертовом пространстве H;

2) для всякого $t \in [t_0, T]$ $a(t)$ и $A_j(t)$ F_t-измеримы;

3) $a(t)$ и $A_j(t)$ равномерно ограничены на $[t_0, T]$ по норме неслучайной константой K;

4) $a(t)$ и $A_j(t)$ равномерно непрерывны на $[t_0, T]$ в следующем смысле: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$M\{\sigma_2(a(t) - a(s))/F_{\min(t,s)}\} < \varepsilon,\ M\{\sigma_2(A_j(t) - A_j(s))/F_{\min(t,s)}\} < \varepsilon$$

$$\text{при } |t - s| < \delta.$$

Теорема 1. *Если выполнены условия* (А), *то м. с. и.* (2) *существует в смысле сходимости в среднем. Его можно получить и как предел в среднем произведений*:

$$\prod_{t_0}^{T}(\Delta_n t; a, \mathfrak{A}) = \overset{\frown}{\prod_{i=1}^{n}} \left[I + a_i \Delta t_i + \sum_{j=1}^{m} A_{ji} \Delta w_{ji} + \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{m} A_{ji}\, \Delta w_{ji} \right)^2 \right], \tag{3}$$

где I — единичный оператор. Выполняется соотношение:

$$M\sigma_2 \left\{ J_{t_0}^{T}(a; \mathfrak{A}) - I - \int_{t_0}^{T} \left[a(t) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} A_j^2(t) \right] dt - \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{T} A_j(t)\, dw_j(t) - \right.$$

$$\left. - \sum_{j_1, j_2 = 1}^{m} \int_{t_0}^{T} \int_{t_0}^{t} A_{j_1}(t) A_{j_2}(u)\, dw_{j_1}(t)\, dw_{j_2}(u) \right\} = o(T - t_0).$$

Доказательство теоремы 1 проводится теми же методами, что и в [1]. Существенно используются такие оценки: для $[b, c] \subseteq [t_0, T]$

$$M\{\sigma_2^2(\Pi_b^c(\Delta_n t; a, \mathfrak{A}))/F_b\} < R^2 < \infty,$$

$$M\{\sigma_2^2(\pi_b^c(\Delta_n t; a, \mathfrak{A}) - \Pi_b^c(\Delta_n t; a, \mathfrak{A}))/F_b\} < O(\sqrt{|\Delta_n t|}).$$

2. Аналогично [1] можно показать, что введенный выше м. с. и. (2) удовлетворяет линейному стохастическому уравнению с операторными коэффициентами подобно тому, как обычный мультипликативный интеграл по-

зволяет представить решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. [2]).

Теорема 2. *Случайный процесс $J_{t_0}(t) = J^t_{t_0}(a; \mathfrak{A})$ является решением уравнения*

$$J_{t_0}(t) = I + \int_{t_0}^{t} \left[a(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} A_j^2(\tau) \right] J_{t_0}(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau) J_{t_0}(\tau)\, dw_j(\tau). \quad (4)$$

Решение это единственно в смысле среднего квадратичного.

Доказательство теоремы 2 основано на использовании свойств произведений (3), а также на применении обычных свойств м. с. и., вытекающих из его определения (2).

Аналогично теореме 2 устанавливаются такие факты: случайные процессы

$$\check{J}_{t_0}(t) = \underset{|\Delta_n t| \to 0}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \prod_{i=0}^{n} \exp \left\{ a_i \Delta t_i + \sum_{j=1}^{m} A_{ji} \Delta w_{ji} \right\},$$

$$Y_{t_0}(t) = J_{t_0}(t)\, X \text{ и } \check{Y}_{t_0}(t) = X J_{t_0}(t)$$

являются соответственно единственными в смысле среднего квадратичного решениями уравнений:

$$\check{J}_{t_0}(t) = I + \int_{t_0}^{t} \check{J}_{t_0}(\tau) \left[a(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} A_j^2(\tau) \right] d\tau + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} \check{J}_{t_0}(\tau) A_j(\tau)\, dw_j(\tau), \quad (4')$$

$$Y_{t_0}(t) = X + \int_{t_0}^{t} \left[a(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} A_j^2(\tau) Y_{t_0}(\tau) \right] d\tau + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} A_j(\tau) Y_{t_0}(\tau)\, dw_j(\tau), \quad (5)$$

$$\check{Y}_{t_0}(t) = X + \int_{t_0}^{t} \check{Y}_{t_0}(\tau) \left[a(\tau) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} A_j^2(\tau) \right] d\tau + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{m} \check{Y}_{t_0}(\tau) A_j(\tau) dw_j(\tau), \quad (5')$$

где $X = X(\omega)$ — случайный линейный ограниченный оператор, не зависящий от $w_j(\tau) - w_j(t_0)$, $\tau \in (t_0, T]$, $j = 1, \ldots, m$, а под F_t для уравнений (5) и (5′) понимается такая σ-алгебра:

$$F_t = \sigma\{X;\ w_j(\tau),\ \tau \in (0, t],\ j = 1, \ldots, m\}.$$

Для уравнения (4) обычными методами [3] можно доказать теорему о существовании и единственности решения. Поэтому можно определить м. с. и. и как решение стохастического линейного уравнения (4). Представление определенного таким образом м. с. и. в виде предела в среднем произведений (1) или (3) можно получить, используя факты, доказанные в п. 1.

3. Отметим ряд свойств м. с. и.

1) Из определения м. с. и. ясно, что для любых t, s, u, $0 \leqslant t \leqslant s \leqslant u < \infty$, $J_t(u) = J_s(u) J_t(s)$.

2) Для любых t, s. $0 \leqslant t \leqslant s < \infty$, $M\{\sigma_2^2(J_t(s) - \mathrm{I})/F_t\} < R^2$. Это означает, что $J_t(s) - \mathrm{I}$ с вероятностью 1 является оператором Гильберта—Шмидта в H.

3) Пусть существуют такие неслучайные постоянные L и l, что $\sum_{j=1}^{m} \sigma_2^2(A_j) \leqslant L$, $\sigma_2^2(X) \leqslant l$. Тогда имеют место оценки:

$$M\sigma_2^2(J_{t_0}(t) - I) \leqslant 4(t - t_0) B e^{4B(t-t_0)}, \qquad M \| J_{t_0}(t) \|^2 \leqslant 3 e^{3B(t-t_0)},$$

$$M\sigma_2^2(Y_{t_0}(t)) = M\sigma_2^2(J_{t_0}(t)\,X) \leqslant 3le^{3B(t-t_0)},$$

где $B = (T - t_0)\left(K + \frac{L}{2}\right)^2 + L$, а $|||A||| = \sup_{h\in H;\,||h||=1} \|Ah\|$.

4) Для решения неоднородного стохастического уравнения

$$Z_{t_0}(t) = I + \int_{t_0}^{t} \left[a(\tau) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} A_j^2(\tau)\, Z_{t_0}(\tau) \right] d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{m} A_j(\tau)\, Z_{t_0}(\tau)\, dw_j(\tau) + \int_{t_0}^{t} b(\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t}\sum_{j=1}^{m} B_j(\tau) dw_j(\tau),$$

где $b(t)$ и $B_j(t)$ — операторные функции на $[t_0, T]$, справедлива формула:

$$Z_{t_0}(t) = J_{t_0}^t(a; \mathfrak{A}) + \int_{t_0}^{t} K_{t_0}(\tau, t) \left[b(\tau)\, d\tau + \sum_{j=1}^{m} B_j(\tau)\, dw_j(\tau) \right],$$

где $K_{t_0}(\tau, t) = J_{t_0}^t(a; \mathfrak{A})\,[J_{t_0}^{\tau}(a; \mathfrak{A})]^{-1}$ $(\tau \leqslant t)$;

5) $J_{t_0}^t(a + b; \mathfrak{A} + \mathfrak{B}) = J_{t_0}^t(a; \mathfrak{A})\, J_{t_0}^t \Bigg\{[J_{t_0}^t(a; \mathfrak{A})]^{-1} \Bigg[b + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m} A_j\right) \times$

$$\times \left(\sum_{j=1}^{m} B_j\right) + \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m} B_j\right)\left(\sum_{j=1}^{m} A_j\right)\Bigg] J_{t_0}^t(a; \mathfrak{A});\, [J_{t_0}^t(a; \mathfrak{A})]^{-1}\mathfrak{B} J_{t_0}^t(a; \mathfrak{A})\Bigg\},$$ где

под $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ соответственно понимаются такие наборы операторных функций: $\mathfrak{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_m\}$, $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = \{A_1 + B_1, A_2 + B_2, \ldots, A_m + B_m\}$, а функции B_j тоже удовлетворяют условиям (A).

Отметим еще некоторые свойства м. с. и. с переменным верхним пределом как случайного процесса.

1) Процесс $J_{t_0}(t)$ непрерывен с вероятностью 1 и сепарабелен на $[t_0, T]$.

2) Если коэффициенты $a(t)$ и $A_j(t)$ — неслучайные функции, случайный процесс $J_{t_0}(t)$ является процессом с независимыми мультипликативными приращениями (см. [4]), т. е. процессом, у которого при $t_0 < t_1 < \ldots$ $\ldots < t_k$ выражения $J_{t_0}(t_k)\, J_{t_0}^{-1}(t_{k+1}), \ldots, J_{t_0}(t_2)\, J_{t_0}^{-1}(t_1)$, $J_{t_0}(t_1)$ независимы между собой.

3) Если $a(t)$ и $A_j(t)$ — процессы Маркова, то процесс $\{J_{t_0}(t), a(t), A_1(t), A_2(t), \ldots, A_m(t)\}$ тоже является процессом Маркова.

4) Процесс $J_{t_0}^t\left(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} A_j^2; \mathfrak{A}\right)$ является мартингалом.

4. Удается представить решение задачи Коши для параболического уравнения второго порядка с операторными коэффициентами с помощью м. с. и. (2) аналогично тому, как это было сделано в [1] для системы параболических уравнений второго порядка.

Рассмотрим операторное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk} I \frac{\partial^2\psi}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x) \frac{\partial\psi}{\partial x_j} + V(x)\, \psi = 0 \tag{6}$$

и условие $\psi(T, x) = f(x)$ $(t \in [t_0, T],\ x \in R^m)$. Здесь $A(x) = \|a_{jk}(x)\|$ — матричная функция порядка m, а $\varphi_j(x)$, $f(x)$, $V(x)$ — операторные функции, удовлетворяющие условиям (B):

1) для любого $x \in R^m$ $f(x)$, $\varphi_j(x)$, $V(x)$ — операторы Гильберта—Шмидта в H;

2) функции $A(x)$, $V(x)$, $\varphi_j(x)$, $f(x)$, $(f'(x))(h)$ и $(f''(x))(h, g)$ для любых $x, h, g \in R^m$ ограничены по норме σ_2 неслучайной константой и непрерывны;

3) матрица $A(x)$ для любого $x \in R^m$ обратима.

Пусть $\xi(t)$ $(t \in [t_0, T])$ — m-мерный случайный процесс, удовлетворяющий уравнению

$$d\xi_j(t) = \sum_{l=1}^{m} b_{jl}(\xi(t))\, dw_l(t) \tag{7}$$

и условию $\xi(t_0) = x$, где $\| b_{jl} \| = B$ — матрица, определяемая из соотношения: $A = B^* B$.

Теорема 3. *Решение задачи Коши* (6) *может быть представлено в виде*:

$$\psi(t, x) = M_{t,x} \widehat{\exp} \int_t^T \{\alpha(\xi(s))\, ds + (\beta(\xi(s))\, ds,\ dw(s))\} f(\xi(T)), \tag{8}$$

где $M_{t,x}$ — *среднее по мере* $\mu_x^{(\xi)}$, *порождаемой в пространстве траекторий* $\{x(t),\ t \in [t_0, T],\ x(t_0) = x\}$ *процессом* $\xi(t)$ (7), $\beta(x)$ — *набор функций* $\beta_j(x)$ $(j = 1, \ldots, m)$,

$$\beta_j(x) = \sum_{k=1}^{m} (B^{-1}(x))_{jk} \varphi_k(x),\ \ \alpha(x) = V(x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m} \beta_j^2(x).$$

Здесь м. с. и. является аналогом производной Радона — Никодима $\frac{d\mu_x^{(\eta)}}{d\mu_x^{(\xi)}}$ меры $\mu_x^{(\eta)}$, порождаемой m-мерным диффузионным процессом $\eta(t)$ с ненулевым вектором сноса, относительно меры $\mu_x^{(\xi)}$ $\left(\frac{d\mu_x^{(\eta)}}{d\mu_x^{(\xi)}},\right.$ как известно, имеет вид экспоненты от интеграла Ито [5, 6]$\left.\right)$.

Результаты п. 4 сформулированы для уравнений, однородных по времени, но они переносятся и на случай, когда коэффициенты зависят и от t.

В заключение выражаю глубокую благодарность Ю. Л. Далецкому за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. Л. Далецкий, Н. И. Тетерина, Мультипликативные стохастические интегралы, УМН, т. 27, вып. 2, 1972.
2. Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, «Наука», М., 1967.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, «Наука», М., 1965.
4. Г. П. Буцан, Некоторые свойства операторных случайных процессов, Автореферат канд. дисс., Институт математики АН УССР, К., 1969.
5. И. И. Гихман, А. В. Скороход, Стохастические дифференциальные уравнения, «Наукова думка», К., 1968.
6. Ю. Л. Далецкий, Континуальные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями, УМН, т. 17, вып. 5, 1962.

Поступила 30.XII 1971 г.

Киевский политехнический институт