УДК 517.946

Обобщение леммы Гронуолла—Беллмана

К. Г. Валеев

Указывается способ построения оценок решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, использующий свойства операторов в пространстве с конусом [1].

Пусть A_j — операторы, преобразующие полуупорядоченное банахово пространство B с конусом K в себя. Через $\rho(A)$ обозначаем спектральный радиус линейного оператора A. Оператор A называется монотонным в B, если из неравенства $x \leqslant y$, $x \in B$, $y \in B$ следует выполнение неравенства $Ax \leqslant Ay$. Если для любого $x \in B$ ($x \in K$) выполнено неравенство $A_1 x \leqslant A_2 x$, то будем записывать, что $A_1 \leqslant A_2$ в B (в конусе K).

Лемма 1. *Если $\rho(A) < 1$ и A — монотонный в B оператор, то неравенство $y \leqslant Ay$ имеет решение: $y \leqslant v$, где $v = Av$.*

Доказательство. Из условий леммы следует, что $y = Ay - z$, $z \geqslant 0$. Рассмотрим сходящиеся к y, v последовательности y_n, v_n, где

$$y_{n+1} = Ay_n - z, \quad v_{n+1} = Av_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad y_0 \leqslant v_0.$$

Из монотонности оператора A из $y_n \leqslant v_n$ следует, что $y_{n+1} \leqslant v_{n+1}$. Предельный переход в неравенстве при $n \to \infty$ доказывает лемму.

Замечание 1. Лемма справедлива для нелинейного монотонного сжимающего оператора A.

Лемма 2. *Если $\rho(A_1) < 1$, $\rho(A_2) < 1$ и $A_1 \leqslant A_2$, а один из операторов A_1, A_2 монотонный в B, то для решений уравнений*

$$y = A_1 y, \qquad v = A_2 v$$

выполняется неравенство $y \leqslant v$.

Доказательство. Для последовательных приближений

$$y_{n+1} = A_1 y_n, \quad v_{n+1} = A_2 v_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \; y_0 \leqslant v_0$$

из неравенства $y_n \leqslant v_n$ следует выполнение неравенства

$$y_{n+1} = A_1 y_n \leqslant A_1 v_n \leqslant A_2 v_n = v_{n+1}.$$

Доказательство леммы следует из неравенства $y_n \leqslant v_n$ при $n \to \infty$.

Замечание 2. Если операторы A_1, A_2 преобразуют конус K в себя, то для выполнения неравенства $y \leqslant v$ достаточно выполнение неравенства $A_1 \leqslant A_2$ лишь в конусе K.

Лемма 3. *Для решения $y(t)$ интегрального неравенства*

$$y(t) \leqslant \varphi(0) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t f_k(s)\, y(s - \tau_k(s))\, ds, \quad -h \leqslant t - \tau_k(t) \leqslant t, \tag{1}$$

где $f_k(t)$, $\tau_k(t)$ — непрерывные при $t \geqslant 0$ функции, $f_k(t) \geqslant 0$ и $y(t) = \varphi(t)$, $0 \leqslant \varphi(t) \leqslant M$, $-h \leqslant t \leqslant 0$, ($\varphi(t)$ — непрерывная функция), при $t \geqslant 0$ выполняется неравенство

$$y(t) \leqslant M \exp\left\{\int_0^t \sum_{k=1}^{n} f_k(s)\, ds\right\}. \tag{2}$$

Доказательство. Введем банахово пространство B непрерывных при $-h \leqslant t \leqslant T$ функций с конусом K неубывающих неотрицательных функций с нормой, определенной по формуле

$$\| y \| = \max_{-h \leqslant t \leqslant T} | y(t)|.$$

Неравенство $x \geqslant y$ обозначает, что $x(t) \geqslant y(t)$ при $t \in [-h, T]$. Введем два оператора A_1, A_2 с нулевыми спектральными радиусами:

$$A_1 y(t) \equiv \varphi(0) + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t f_k(s)\, y(s - \tau_k(s))\, ds \ (t \geqslant 0), \ A_1 y(t) \equiv \varphi(t)$$
$$(-h \leqslant t \leqslant 0),$$

$$A_2 y(t) \equiv M + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t f_k(s)\, y(s - \tau_k(s))\, ds (t \geqslant 0), \ A_2 y(t) \equiv M \quad (-h \leqslant t \leqslant 0).$$

Так как $A_1 \leqslant A_2$ в B и A_1, A_2 — монотонные операторы, то из лемм 1, 2 следует, что при $t \in [-h, T]$ $y(t) \leqslant v(t)$, где $v(t) = A_2 v(t)$.

Введем монотонный оператор A_3

$$A_3 y(t) \equiv M + \sum_{k=1}^{n} \int_0^t f_k(s)\, y(s)\, ds \ (t \geqslant 0), \ A_3 y(t) \equiv M \ (-h \leqslant t \leqslant 0).$$

Так как A_2, A_3 преобразуют K в K и $A_3 \geqslant A_2$ в K, то из замечания 2 следует, что при $t \in [-h, T]$ $v(t) \leqslant w(t)$, где $w(t)$ — решение уравнения $w(t) = A_3 w(t)$. Решая это уравнение, в силу произвольности T придем к неравенству (2).

Замечание 3. Лемму 3 можно рассматривать как обобщение леммы Гронуолла — Беллмана [2]. С ее помощью докажем теорему, обобщающую одну из теорем Беллмана [3].

Теорема 1. *Пусть дифференциальное уравнение в банаховом пространстве*

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t) + \mu \sum_{k=1}^{n} B_k(t)\, z(t - \tau_k(t)), \quad -h \leqslant t - \tau_k(t) \leqslant t, \tag{3}$$

где $z(t)$ удовлетворяет при $t \leqslant 0$ начальному условию:

$$z(t) = \varphi(t), \quad \| \varphi(t) \| \leqslant M, \quad -h \leqslant t \leqslant 0, \tag{4}$$

имеет при $\mu = 0$ устойчивое решение $z = 0$. Если выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{0}^{\infty} \| B_k'(t) \| \, dt < \infty, \tag{5}$$

то решение $z = 0$ уравнения (3) устойчиво при $\mu \neq 0$.

Доказательство. Обозначим через $U(t-s)$ разрешающий оператор уравнения (3) при $\mu = 0$. При $\mu \neq 0$ получим из (3) уравнение

$$z(t) = U(t)\varphi(0) + \mu \int_{0}^{t} U(t-s) \sum_{k=1}^{n} B_k(s) z(s - \tau_k(s)) \, ds. \tag{6}$$

Так как $\| U(t) \| \leqslant m < \infty$ при $t \geqslant 0$, то из (6) получим

$$y(t) \leqslant mM + |\mu| \int_{0}^{t} m \sum_{k=1}^{n} \| B_k(s) \| \, y(s - \tau_k(s)) \, ds, \quad y(t) \equiv \| z(t) \|. \tag{7}$$

Из леммы 3 имеем оценку для решения интегрального неравенства (7):

$$y(t) \leqslant mM \exp \left\{ m |\mu| \int_{0}^{t} \sum_{k=1}^{n} \| B_k(s) \| \, ds \right\},$$

которая доказывает теорему.

Аналогичным путем доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть для дифференциального уравнения*

$$\frac{dz(t)}{dt} = \mu \sum_{k=1}^{n} B_k(t) z(t - \tau_k), \quad 0 \leqslant \tau_k \leqslant h, \quad \mu < 0, \tag{8}$$

линейные интегрируемые операторы $B_k(t)$ удовлетворяют условиям:

$$\sum_{k=1}^{n} \sup_{t \geqslant 0} \left\| \int_{0}^{t} (B_k(s) - C_k) ds \right\| \leqslant m, \qquad \sum_{k=1}^{n} \sup_{t \geqslant 0} \| B_k(t) \| \leqslant L.$$

Наряду с уравнением (8) рассмотрим другое уравнение:

$$\frac{dv(t)}{dt} = \mu \sum_{k=1}^{n} C_k v(t - \tau_k), \quad \mu > 0. \tag{9}$$

Для решений уравнений (8), (9) с начальными условиями при $t \leqslant 0$

$$z(t) = \varphi_1(t), \quad v(t) = \varphi_2(t), \quad \| \varphi_j(t) \| \leqslant M, \quad \| \varphi_1(t) - \varphi_2(t) \| \leqslant \eta$$

при $0 \leqslant t \leqslant T\mu^{-1}$ выполняется неравенство

$$\| z(t) - v(t) \| \leqslant [\eta + 2\mu M (Lh + m + LmT)] \exp \{LT\}. \tag{10}$$

В качестве другого приложения лемм 1, 2 найдем оценку для решения $z(t)$ дифференциального уравнения нейтрального типа:

$$v(t) - Av(at) = \sum_{k=1}^{n} B_k(t) z(t - \tau_k(t)), \quad v(t) \equiv \frac{dz(t)}{dt}, \quad 0 < a < 1, \tag{11}$$

где $B_k(t)$ — интегрируемые операторы; $a^{-1}\|A\| < 1$, $-h \leqslant t - \tau_k(t) \leqslant t$; $z(t) = \varphi(t)$, $\|\varphi(t)\| \leqslant M$, $-h \leqslant t \leqslant 0$. Интегрируя уравнение по t, получим интегральное уравнение

$$z(t) = (E - a^{-1}A)\varphi(0) + a^{-1}Az(at) + \int_0^t \sum_{k=1}^n B_k(s)\, z(s - \tau_k(s))\, ds,$$

где E — тождественный оператор. При $t \geqslant 0$ получим неравенство

$$y(t) \leqslant M\|E - a^{-1}A\| + a^{-1}\|A\|\, y(at) + \int_0^t \sum_{k=1}^n \|B_k(s)\|\, y(s - \tau_k(s))ds$$

для $y(t) \equiv \|z(t)\|$. Используя леммы 1, 2 при $t \leqslant 0$, получим оценку: $y(t) \leqslant w(t)$, где $w(t)$ — решение уравнения

$$w(t) = M\|E - a^{-1}A\| + a^{-1}\|A\|\, w(at) + \int_0^t \sum_{k=1}^n \|B_k(s)\|\, v(s)\, ds. \qquad (12)$$

Заменяя $v(at)$ на $v(t)$, получим грубую оценку:

$$\|z(t)\| \leqslant M\|aE - A\|(a - \|A\|)^{-1} \exp\left\{a(a - \|A\|)^{-1} \int_0^t \sum_{k=1}^n \|B_k(s)\|\, ds\right\}. \qquad (13)$$

Аналогичные оценки можно получить для нелинейных уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Функциональный анализ (общ. ред. С. Г. Крейна), «Наука», М., 1972.
2. Б. П. Демидович, Лекции по математической теории устойчивости, «Наука», М., 1967.
3. Р. Беллман, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, М., 1954.

Поступила 23.XI 1971 г.,
после переработки — 12.XII 1972 г.

Киевский институт инженеров гражданской авиации